DATE

§2.6 微分中值定理

一、函数极值及必要条件

1. 定义：定义在区间 I 上的 $f(x)$，~~若 $x_0 \in I$ 使 $\delta > 0$~~

若 $\exists \delta > 0$ 使 $\forall x \in U(x_0, \delta) \subseteq I$

有 $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$

称：$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大(小)值

点 x_0 为 $f(x)$ 极大(小)值点.

2. 费马定理：$f'(x_0) = 0$ （x_0 为极值点）

$f(x)$ 在点 x_0 处可导，若 x_0 为 $f(x)$ 一极值点，则 $f'(x_0) = 0$

证：不妨设 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点

取到极值的必要条件

$\exists \delta > 0$ 使对 $\forall x_0 + \Delta x \in U(x_0, \delta)$ 有

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$

$\Delta x < 0$ 时有 $\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$

$\Delta x > 0$ 时有 $\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$

$\because f(x)$ 在 x_0 处可导，由极限保号性：

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$$

$\therefore f'(x) = 0$

x_0 为极小值点情形同理可证.

若 $f'(x_0) = 0$，称 $x = x_0$ 为驻点或稳定点.

注：~~必要条件~~，可导的条件不可少

反例：$y = x^3$ ~~$y'(0) = 0$~~ 但 $x = 0$ 不是极值点

$f'(0) = 0$

DATE

S M T W T F S

二、微分中值定理

1、罗尔中值定理：若 $f(x) \in C[a,b]$（连续） $\cap D(a,b)$（可导），且 $f(a)=f(b)$，$\exists \xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$.

证：书 P136.

(二) 三个条件：① $f(x) \in C[a,b]$

② $f(x) \in D(a,b)$

③ $f(a)=f(b)$

※ 少一条件~~是~~结论可能不成立

e.g：① $f(x)=|x|$ 在 $[-1,1]$ 上连续，$f(-1)=f(1)$

但在 $(-1,1)$ 内有 $x=0$ 不可导

∴ 不存在 …

② $g(x)=x$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导.

但 $g(0)\neq g(1)$

∴ 也不存在…

③ $h(x)=x-[x]=\begin{cases} x, & 0\le x<1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$

在 $(0,1)$ 可导，$h(0)=h(1)=0$，

但 在 $x=1$ 不连续.

∴ 不存在.

※ 定理条件是充分的，不是必要的，条件不满足时结论可能成立

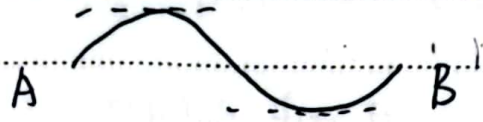
例：$f(x)=\begin{cases} x^2, & -1\le x<1 \\ 4-2x, & 1\le x\le 2 \end{cases}$ 在 $x=1$ 间断，$f(-1)\neq f(2)$，三条件都不满足

但 $\exists \xi=0$ 使 $f'(\xi)=f'(0)=0$ 、

DATE

(3) 几何意义（几何解释）：闭区间 $[a,b]$ 上处处连续曲线且在 (a,b) 内部曲线切线处处存在，不平行于 y 轴

在曲线弧 AB 上至少有一点 C，在该点处切线水平（平行于 x 轴）



(4) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足条件

则 $\exists\ \xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$

$\therefore f'(x)\big|_{x=\xi}=0$ 即 $f'(x)=0$ 有根 $\xi \in (a,b)$

导函数方程根的存在定理（别称）

(5) 应用：例 证：$x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于 1 的正实根

存在性：

设 $f(x)=x^5-5x+1$ 在 $[0,1]$ 连续

且 $f(0)=1$，$f(1)=-3$

$\therefore$ 由 介值定理：$\exists x_0 \in (0,1)$ 使 $f(x_0)=0$ 即为方程的小于 1 的正实根

唯一性：

另设有 $x_1 \in (0,1)$，$x_1 \neq x_0$，使 $f(x_1)=0$

$f(x)$ 在 x_0，x_1 之间满足罗尔定理条件

$\therefore$ 至少存在一个 ξ（在 x_0，x_1 之间）使 $f'(\xi)=0$

$f'(x)=5(x^4-1)<0$ $(x \in (0,1))$ 矛盾

$\therefore$ 方程有且仅有一个小于 1 的正实根

DATE

② $F(x)=(1-x)^2 f(x)$, $f(x)$在$[1,2]$上二阶可导.
又知$f(2)=0$. 证：在$(1,2)$内存在点ξ使$F'(\xi)=0$

证：$F(x) \in C[1,2] \cap D(1,2)$
$F(1)=F(2)=0$,
$\therefore \exists \xi_1 \in (1,2)$使$F'(\xi_1)=0$
$F'(x)=(2x-2)f(x)+(x-1)^2 f'(x)$
$F'(x) \in C[1,\xi_1] \cap D(1,\xi_1)$,
$F'(1)=F'(\xi_1)=0$ $\therefore F(x)$满足罗尔定理条件
$\Rightarrow \exists \xi \in (1,\xi_1) \subset (1,2)$使$F''(\xi)=0$.

③ 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$满足
$a_1+\frac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0$的实数.
证：$a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$①在$(0,\frac{\pi}{2})$内至少有一个根.

证：构造$f(x)=a_1\sin x+\frac{1}{3}a_2\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2n-1}a_n\sin(2n-1)x$
$f'(x)=$①式LHS.
$\because f(x) \in C[0,\frac{\pi}{2}] \cap D(0,\frac{\pi}{2})$
$f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0$
$\therefore \exists \xi \in (0,\frac{\pi}{2})$使$f'(\xi)=0$
$\therefore \cdots$ 得证.

DATE

④ 设 $f(x) \in C[0,\pi] \cap D(0,\pi)$

证：$\exists \xi \in (0,\pi)$，使 $f'(\xi)\sin\xi + f(\xi)\cos\xi = 0$

证：令 $F(x) = f(x)\sin x \in C[0,\pi] \cap D(0,\pi)$

$F(0) = F(\pi) = 0$

$\therefore \exists \xi \in (0,\pi)$ 使 $F'(\xi) = 0$

即 $\therefore$ $\checkmark$

⑤ $f(x) \in C[0,1] \cap D(0,1)$ 且 $0 < f(x) < 1$，

$\forall x \in (0,1)$ 有 $f'(x) \neq 1$

证：存在唯一 $\xi \in (0,1)$ 使 $f(\xi) = \xi$.

证：$F(x) = f(x) - x \in C[0,1]$

$F(0) = f(0) - 0 > 0$

存在性 $F(1) = f(1) - 1 < 0$

$\therefore$ 由闭区间上连续函数零点存在定理知

$\exists \xi$ 使 $F(\xi) = 0$ 成立 即 $f(\xi) = \xi$.

唯一性. [反证法]：若存在两点 $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ $(\xi_1 \neq \xi_2)$

$F(\xi_1) = F(\xi_2) = 0$

$\therefore$ (ξ_1, ξ_2) 内 $\exists \xi_3$ 使 $F'(\xi_3) = f(\xi_3) - 1 = 0$

又 $f'(x) \neq 1$

$\therefore$ 矛盾

$\therefore$ 有唯一 $\xi \in (0,1)$ 使 $f(\xi) = \xi$

76

2. 拉格朗日(Lagrange)中值定理

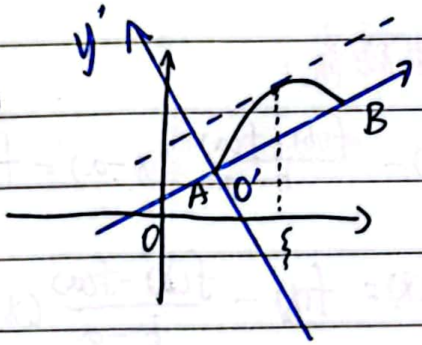
Date.

(1) 若 $f(x)$ 满足 { ① 闭区间 $[a,b]$ 上连续 ② 开区间 (a,b) 内可导 } 两个存在

$\exists\ \xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

或 $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$

(2)



新坐标轴上满足罗尔定理

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(3) 证明: ① 要证 存在 $\xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 成立

分析法 只要证: $f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ 成立.

只要证: $\left[f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]\Big|_{x=\xi} = 0$ 成立.

(只要证: $\left[f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]'\Big|_{x=\xi} = 0$ 成立)

$F(x)$

巧妙构造

只要证: $\left[f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)\right]'\Big|_{x=\xi} = 0$ 成立

令 $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$

只要证: $F'(\xi) = 0$ (i) 成立

证(i)式: $F(x) \in C[a,b]$, $F(x) \in D(a,b)$

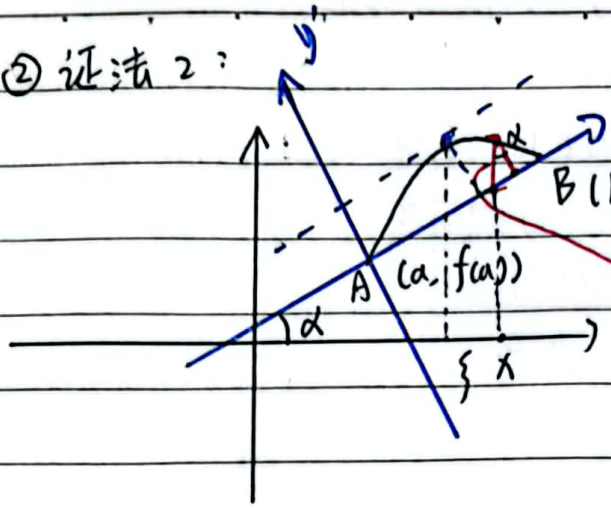
$F(a) = F(b) = 0$ 由罗尔定理: $\exists\ \xi \in (a,b)$

使 $F'(\xi) = 0$ 即(i)成立.

∴ 原结论成立

Date.

② 证法 2：



$AB: y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

改变为：

$$f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$$

几何法：

$(x, f(x))$ 到 x 轴距离：

$$\cos\alpha\left[f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)\right]$$

仍相当于构造 $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$

(4) 几何意义：在满足拉氏的条件下，曲线内部上存在一点 $(\xi, f(\xi))$ 使该点切线平行于两端点连线

(5) 有限增量公式：

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，$x_0, x_0+\Delta x \in (a,b)$. 则有：

$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1)$

也可写成：$\Delta y = f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1)$

推论：① 若 $f(x)$ 在区间 I 上导数恒为 0，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

② 若 $f(x)$、$g(x) \in D(a,b)$，且 $\forall x \in (a,b)$ 恒有 $f'(x) = g'(x)$，则在 (a,b) 内 $f(x) = g(x) + C$ (C 为常数)

2

→ ③ 若 $f(x)$ 满足：$\begin{cases} \text{在 } [x_0, x_0+\delta) \text{ 上连续} \\ \text{在 } (x_0, x_0+\delta) \text{ 内可导} \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) \text{ 存在或} = \infty \end{cases}$

则：$f_+'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$

同理 若 $f(x)$ 满足

$\begin{cases} \text{在 } (x_0-\delta, x_0] \text{ 上连续} \\ \text{在 } (x_0-\delta, x_0) \text{ 内可导} \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \text{ 存在或} = \infty \end{cases}$

则：$f_-'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$

Date: / /

* 对推论②、③的证明

②: 作 $F(x) = f(x) - g(x)$

$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$

由推论1: $F(x) = C$ (C为一常数)

即 $f(x) - g(x) = C$

$\therefore f(x) = g(x) + C$

③ 若 $f(x)$ 满足 $\begin{cases} f(x) \in C[x_0, x_0+\delta) \\ f(x) \in D(x_0, x_0+\delta) \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) = A \ (\infty) \end{cases}$ 则 $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$

分析: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(\xi) \quad (x_0<\xi<x)$

证: $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ $f(x) \in C[x_0, x] \cap D(x_0, x)$

$\exists \xi \in (x_0, x)$ 使 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi)$

因此: $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(\xi) \quad (x_0<\xi<x)$

$= \lim\limits_{\xi\to x_0^+} f'(\xi) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$

Date.

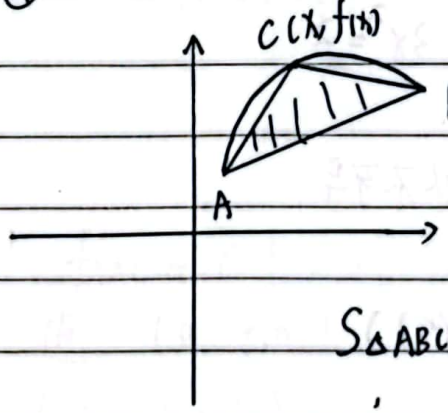
(6) 构造 $F(x)$ 证 Lagrange：

① $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

② $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

③ $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$

④



$$S_{\triangle ABC}(x) = \begin{vmatrix} 1 & a & f(a) \\ 1 & b & f(b) \\ 1 & x & f(x) \end{vmatrix}$$ → 行列式

$S(a) = S(b) = 0$

$S_{\triangle ABC}(x) = (b-a)f(x) - x[f(b)-f(a)] + af(b) - bf(a)$

$\therefore S'(\xi) = (b-a)f'(\xi) - (f(b)-f(a)) = 0$

即 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

③ 若 $f(x)$ 满足：在 $[x_0, x_0+\delta)$ 上连续；在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内可导；$\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$ 存在或 $=\infty$

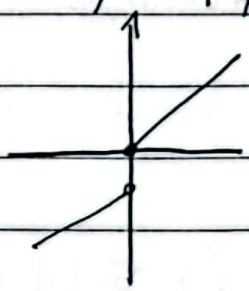
则：$f_+'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$

同理 若 $f(x)$ 满足：在 $(x_0-\delta, x_0]$ 上连续；在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内可导；$\lim_{x\to x_0^-} f'(x)$ 存在或 $=\infty$

则：$f_-'(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x)$

应用实例：

$$y = \begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ x-1, & x<0 \end{cases}$$



$f_+'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1$

Date.

(7) 例：

① 讨论 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x>1 \\ 1, & x=1 \\ x^3, & x<1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导性.

② ∴ $f(x)$ 在 R 连续.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & x>1 \\ 3x^2, & x<1 \end{cases}$$

由推论 3：$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to1^+}2x=2$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}f'(x)=\lim_{x\to1^-}3x^2=3$$

$f'_+(1)\neq f'_-(1)$ ∴ $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

② 证：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\ (-1\le x\le1)$

$f(x)=\arcsin x+\arccos x$

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0$$

$f(x)\equiv C,\ x\in[-1,1]$

∵ $f(0)=\arcsin0+\arccos0=\frac{\pi}{2}$

∴ $C=\frac{\pi}{2}$

∴ $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$

Date.

③ 证：$x>0$ 时 $\frac{x}{1+x}<\ln(x+1)<x$

设 $f(x)=\ln(1+x)$

$f(x)$ 在 $[0,x]$ 上满足拉式定理条件.

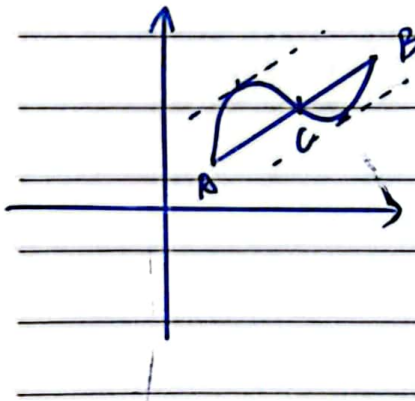
$\therefore f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0) \quad (0<\xi<x)$

$f(0)=0,\ f'(x)=\frac{1}{1+x}$.

$\therefore \ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi} \quad (0<\xi<x)$

$\therefore \frac{x}{1+x}<\ln(x+1)<x$

④ $f(x)\in C[a,b]$ 在 (a,b) 内 $f''(x)$ 存在，连 $(a,f(a))$，$(b,f(b))$ 直线，与曲线 $y=f(x)$ 相交于 $(c,f(c))$ $(a<c<b)$. 证：(a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f''(\xi)=0$



证：将 $[a,b]$ 分成两区间 $[a,c]$，$[c,b]$

$f(x)$ 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上分别满足拉氏条件.

$\exists \xi_1\in(a,c)$ 使 $\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\xi_1)$

$\exists \xi_2\in(c,b)$ 使 $\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(\xi_2)$

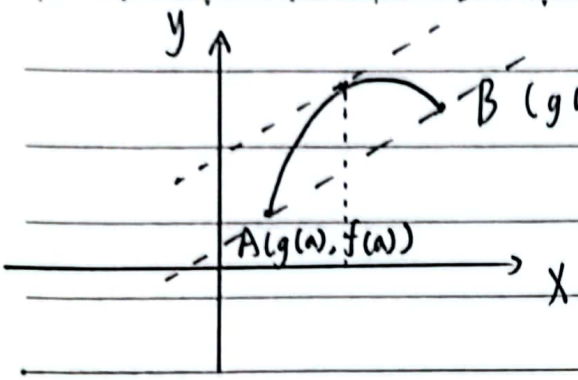
$K_{AB}=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}$

$\therefore f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ 又 $f(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]\subset(a,b)$ 上满足罗尔定理条件

$\therefore \exists \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$ 使 $f''(\xi)=0$.

Date.

3. 柯西（Cauchy）中值定理



$\begin{cases} X = g(t) \\ Y = f(t) \end{cases}$ $a \le t \le b$ 确定函数 $y = y(x)$

满足拉氏条件

$$k_{AB} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$t =$ {对应曲线上点 $(g(\xi), f(\xi))$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

$$\boxed{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$

(1) 定理：若 $f(x), g(x)$ 满足条件 {① 在 $[a,b]$ 上连续 ☆
② 在 (a,b) 上可导 ☆
③ $g'(x) \neq 0$ ☆

($\forall x \in (a,b)$)

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

可改写为：$[f(b)-f(a)]g'(\xi) - [g(b)-g(a)]f'(\xi) = 0$

即要证：$[f(b)-f(a)]g'(x) - [g(b)-g(a)]f'(x) = 0$

在 (a,b) 内有根.

Date.

(2) 证：① 令 $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))-f(a)$

$F(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$

$F(a)=F(b)=0$

$\therefore \exists \xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$

$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$

$\Rightarrow f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0$

$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

② 证法2：

$F(x)=[f(b)-f(a)]g(x)-[g(b)-g(a)]f(x)$

$F(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$ 且

$F(a)=f(b)g(a)-g(b)f(a)=F(b)$

由罗尔定理：$\exists \xi\in(a,b)$ 使

$F'(\xi)=[f(b)-f(a)]g'(\xi)-[g(b)-g(a)]f'(\xi)=0$

即 $[f(b)-f(a)]g'(\xi)=[g(b)-g(a)]f'(\xi)$

$\forall x\in(a,b)\quad g'(x)\neq 0$

$\therefore g'(\xi)\neq 0$ 且 $g(b)\neq g(a)$

$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

(3) 拉格朗日中～为柯西～的特殊情形.

($g(x)=x$ 时)

9

Date.

④ 例：(1) 设 $f(x) \in C[0,1] \cap D(0,1)$

证：至少 $\exists\ \xi \in (0,1)$ s.t. $f'(\xi) = 2\xi[f(1)-f(0)]$

~~$F(x) = f(x)$~~

令 $g(x) = x^2$，$f(x)$、$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足柯西~条件.

$$\therefore \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 … $\checkmark$.

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 满足罗尔~条件且不恒为常数.

[用拉格朗日]

证：$\exists\ \xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi) > 0$.

证：$[a,b]$ 上一定存在最大、小值 M、m.

且 M 和 m 中至少一个不等于 $f(a)$、$f(b)$

不妨设 $M \neq f(a)$

$\exists\ \eta \in (a,b)$ 使 $f(\eta) = M$

$\because f(x) \in C[a,\eta] \cap D(a,\eta)$

由 拉氏~

$\exists\ \xi \in (a,\eta)$ s.t. $f'(\xi) = \frac{f(\eta)-f(a)}{\eta-a} > 0$

Date.

§2.6 (*) 中值定理应用及数学建模初步

一、罗尔定理应用

1. 证明方程根的存在性

证明 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内有一个根 ξ

若 $\exists F(x)$ 使 $\forall x \in [a,b]$ 都有 $F(x)=f(x)$

$\Leftrightarrow F'(\xi)=0$

对 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用罗尔定理

$\exists \xi \in (a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)=0$

例：设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为实常数

证明：$a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots + a_n\cos nx = 0$ 在 $(0,\pi)$ 内有一个根

设：$f(x) = a_1\cos x + \cdots + a_n\cos nx \in C[0,\pi]$

令 $F(x) = a_1\sin x + a_2\frac{\sin 2x}{2} + \cdots + a_n\frac{\sin nx}{n}$

$F'(x) = f(x), \quad x \in [0,\pi]$

由 $F(x) \in C[0,\pi) \cap D(0,\pi)$

$F(0) = F(\pi) = 0$

由罗尔定理 $\exists \xi \in (0,\pi)$ 使 $F'(\xi)=0$.

即 $f(\xi)=0$ 故方程有一个根

2. 用于证明含有 ξ 的等式（尤其含有 ξ 处导数）

$\Leftrightarrow F'(\xi)=0$，对 $F(x)$ 用罗尔定理

例：拉氏～、柯西定理.

Date.

二、拉氏定理应用

$\exists \xi \in (a,b)$, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

$\Leftrightarrow f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$ (1)

当 $b<a$ 时 只要 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上满足拉氏条件 (1)仍成立.

对 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 用拉氏~

$f(a)-f(b) = f'(\xi)(a-b)$ $(b<\xi<a)$

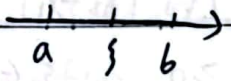
$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$

不论 $a<b$ 或 $a>b$. 只要 $f(x)$ 满足拉氏条件

则: $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$ (ξ 介于 a、b 之间).

不论 $a>b$ 或 $a<b$, $0<\dfrac{|\xi-a|}{|b-a|}<1$

$\Leftrightarrow 0<\left|\dfrac{\xi-a}{b-a}\right|<1$





$\Leftrightarrow 0<\dfrac{\xi-a}{b-a}<1$, 令 $\theta = \dfrac{\xi-a}{b-a} \in (0,1)$

$\xi = a+\theta(b-a)$

☆ $f(b)-f(a) = f'(a+\theta(b-a))(b-a)$

其他形式: $x_1 \neq x_2$, $f(x)$ 在 x_1, x_2 构成区间上满足拉氏条件.

☆ $f(x_2)-f(x_1) = f'(x_1+\theta(x_2-x_1))(x_2-x_1)$

$a = x_0$, $b = x_0+\Delta x$, $\Delta x \neq 0$.

☆ $f(x_0+\Delta x)-f(x_0) = f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x$ $\quad 0<\theta<1$

Date.

1. 单调性定理

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，在 I 内部可导

(1) $x \in I$ 的内部，$f'(x) \geq 0$，则 $f(x)$ 在 I 上递增

(2) $f'(x) > 0$ 严格递增

$f'(x) \leq 0$ 递减

$f'(x) < 0$ 严格递减

(3) $f'(x) \equiv 0$ 则 $f(x)$ 在 I 上是常值函数

$(f'(x) = 0)$

证：$\forall x_1, x_2 \in I$，且 $x_1 < x_2$.

由 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上满足拉氏条件

$\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

(1) $x \in I$ 内部，$f'(x) \geq 0$ $\xi \in I$ 内部

$\therefore f'(\xi) \geq 0$，$x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$

$\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ 知 $f(x)$ 在 I 上为递增函数.

(2) 同理可证

(3) $x \in I$ 内部，$f'(x) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0$

$\Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$

知 $f(x)$ 为 I 上的常值函数.

2. 证明不等式

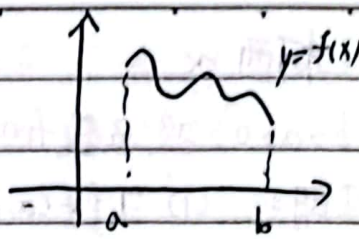
例：设 $b > a > e$，证 $a^b > b^a$

证：要证 $a^b > b^a$ 成立，只要证：$\ln a^b > \ln b^a$ 成立

只要证：$b \ln a > a \ln b$ 成立

Date.

只要证：$\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}$ (1) 成立



设 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \in [a,b]$

$f(x) \in C[a,b] \cap D(a,b)$

$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ 知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格递减 (*)

$f(a) > f(b)$

由 $a<b \Rightarrow f(a) > f(b)$ 即 (1) 成立

故原结论成立

证法二：从 (*) 开始证：$\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} = f(b) - f(a)$

$= f'(\xi)(b-a) < 0$

$\Rightarrow \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}$ 即 (1) 成立，故原结论成立

例：证 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时 $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$

证：要证原式，需证：$\tan x - x - \frac{x^3}{3} > 0$ 成立

设 $f(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$，$f(0) = 0$

只要证：$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时 $f(x) > f(0)$ (1) 成立

由 $f(x) \in C[0, \frac{\pi}{2}) \cap D(0, \frac{\pi}{2})$

$f'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$，$\tan x > x \Rightarrow \tan^2 x > x^2$

$\Rightarrow f'(x) > 0$ 知 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上严格单增 (*)

由 $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) > f(0)$，即 (1) 成立，∴ 原结论成立

证法二：由 (*) $f(x) - f(0) = f'(\xi)x > 0$

$\xi \in (0,x) \subset (0, \frac{\pi}{2})$ $f'(\xi) > 0$

$\Rightarrow f(x) > f(0)$ 即 (1) 成立 故原结论成立

Date.

三. 柯西~

1. $b>a>0$，设函数 $f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$.

证明：(1) $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$

(2) $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\xi^2 f'(\xi)}{ab}$

证：

(1) $LHS=\dfrac{f(a)-\frac{af(b)}{b}}{1-\frac{a}{b}}=\dfrac{\frac{f(a)}{a}-\frac{f(b)}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\dfrac{\frac{f(x)}{x}\Big|_b^a}{\frac{1}{x}\Big|_b^a}$

$=\dfrac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)'\Big|_{x=\xi}}{\left(\frac{1}{x}\right)'\Big|_{x=\xi}}=f(x)-f'(x)x\Big|_{x=\xi}=RHS.$

(2) $\dfrac{ab(f(b)-f(a))}{b-a}=\xi^2 f'(\xi)=\dfrac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi^2}}=\dfrac{f(x)\Big|_{x=\xi}}{\left(-\frac{1}{x}\right)'\Big|_{x=\xi}}$

$=\dfrac{f(b)-f(a)}{\left(-\frac{1}{b}\right)-\left(-\frac{1}{a}\right)}=\dfrac{f'(\xi)}{\left(-\frac{1}{x}\right)'\Big|_{x=\xi}}=\xi^2 f'(\xi)$

2. 结论中含二阶及更高阶导数时，多次运用柯西~.

核心：若 $L(x)$、$H(x)$ 有 $(n+1)$ 阶导，且 $L(a)=L'(a)=\cdots=L^{(n)}(a)=0$，$H(a)=H'(a)=\cdots=H^{(n)}(a)=0$.

$\exists\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{L(b)}{H(b)}=\dfrac{L^{(n+1)}(\xi)}{H^{(n+1)}(\xi)}$

Date.

例：证若$f(x)$在x_0某邻域$U(x_0)$内有三阶导，对任一$x\in U(x_0)$，有$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}+f'''(\xi)\frac{(x-x_0)^3}{3!}$.
(ξ介于x_0，x之间)

证：$\dfrac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!}}{\frac{(x-x_0)^3}{3!}}=f'''(\xi)$

$L(t)=f(t)-f(x_0)-f'(x_0)(t-x_0)-f''(x_0)\dfrac{(t-x_0)^2}{2}$

$L'(t)=f'(t)-f'(x_0)-f''(x_0)(t-x_0)$

$L''(t)=f''(t)-f''(x_0)$

$L'''(t)=f'''(t)$

$H(t)=\dfrac{(t-x_0)^3}{3!}$

$H'(t)=\dfrac{(t-x_0)^2}{2!}$

$H''(t)=t-x_0$

$H'''(t)=1$

$L(x_0)=L'(x_0)=L''(x_0)=0$

$H(x_0)=H'(x_0)=H''(x_0)=0$.

$\therefore \dfrac{L(x)}{H(x)}=\dfrac{L'''(\xi)}{H'''(\xi)}$

微分中值定理.

Date: / /

1. 双中值

$f(x) \in C[0,1] \cap D(0,1)$, $f(0)=0$, $f(1)=1$.

证：对 $\forall$ 给定正数 a, b 在 $(0,1)$ 内存在 $\xi \neq \eta$ 使得

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a+b$$

[分析]：一般套路是 将原区间 $[a_1, a_2]$ 拆成 $[a_1, c]$ 和 $[c, a_2]$.

在两子区间上分别用拉氏～

关键点、难点：选取 c

(c 不一定是具体的数，存在即可)

证：$\frac{f(c)-f(0)}{c-0} = f'(\xi)$ $\quad \frac{f(1)-f(c)}{1-c} = f'(\eta)$

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a\cdot\frac{c}{f(c)} + b\cdot\frac{1-c}{1-f(c)} = a+b$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b}\cdot\frac{c}{f(c)} + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{1-c}{1-f(c)} = 1 \quad ①$$

我们不知 $f(x)$ 表达式.

对不同 $f(x)$，固定 c，$f(c)$ 不同.

∴ c 应不固定

即等式成立应与 c 无关

$\Rightarrow$ 等式① $LHS = \frac{1}{a+b}\left(\frac{a}{f(c)} - \frac{b}{1-f(c)}\right)c + \frac{b}{a+b}\cdot\frac{1}{1-f(c)} = 1$

c 前系数：$\frac{1}{a+b}\left(\frac{a}{f(c)} - \frac{b}{1-f(c)}\right) = 0 \Rightarrow a[1-f(c)] - bf(c) \Rightarrow f(c) = \frac{a}{a+b}$

接下来说明 $\exists c$ 使 $f(c) = \frac{a}{a+b}$

想到闭区间连续函数介值定理

Date: / /

完整证明：

由闭区间上连续函数介值定理

$\exists\ c \in (0,1)$ s.t. $f(c)=\frac{a}{a+b}$

在 $[0,c]$, $[c,1]$ 用拉氏 ~

$\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=f'(\xi)$, $\frac{f(1)-f(c)}{c-0}=f'(\eta)$ $\xi\in(0,c)$, $\eta\in(c,1)$

代入：$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}$ 整理得 $\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$

2、积分因子法.

① $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 内可导，$f(1)=0$. 证：$\exists\ \xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0$

辅助函数好找.

$F(x)=f(x)\sin x$

$F(0)=F(1)=0$

罗尔定理：$F'(\xi)=0$, $\xi\in(0,1)$.

② 要证形式如：$f'(\xi)+p(\xi)f(\xi)=q(\xi)$

辅助函数：$F(x)=f(x)e^{\int p(x)dx}-\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$

$F'(x)=[f'(x)+q(x)f(x)-q(x)]e^{\int p(x)dx}$

找 $F(a)=F(b)$

特别地：$f'(\xi)+p(\xi)f(\xi)=0$

令 $F(x)=f(x)e^{\int p(x)dx}$ 即可.

Date: / /

③ eg: (i) $f'(\xi)+2f(\xi)=0$

$F(x)=$ $e^{2x}f(x)$

(ii) $f(x)=$ 所呀, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=0$, $f(1)=1$

证: $\exists \xi\in(0,1)$ 使 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$

~