
电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China
微积分概论
理解大学，不负年华
课程内容与考核介绍
微积分概述
数学科学学院 汪小平

一、理解大学，不负年华

- 新起点，新征程

重塑认知 自觉主动

- 知识
- 能力
- 思维(认知)

如何学

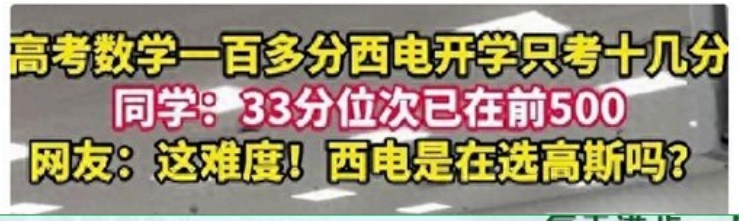
应试学

题海战

高考131开学考12分，5800学霸一夜"封神"变"学渣"

2026-09-09 11:52 · 自媒体边唐

高考数学130+的学霸，大学开学考只考了十几分？这不是段子，而是今年西安电子科技大学5800多名新生共同经历的"噩梦"。



每天进步一点

- 注重知识体系和方法体系的建立
- 常思考，善总结
- 培养发现问题、分析问题和解决问题的习惯
- 坚持学习，培养终身学习习惯 --- 核心竞争力



专注

数学科学学院 - 微积分

2/17

- **众多平台,更多机会**

教授开放日

- **学习平台**：知识渊博的教授、拔尖人才培养班、出国项目与国际班、高端讲座（**扩展视野，打开眼界**）
- **竞赛平台**：ACM/ICPC程序设计竞赛、数学建模竞赛、大学生数学竞赛...（**快速提升能力**）
- **研究平台**：教师研究团队、各类工作室、**创新项目**...（**提升研究与创新能力**）
- **锻炼平台**：班干部、学生会、各类协会、团队负责人...（**提升沟通、协作、管理能力**）





☑ 一年级新生课外创新实践项目计划 (教务处)

☑ 大学生创新训练计划 (教务处)

正确认识使用AI

- AI像一个不知疲倦的**超级助手**，能看、能听、能说、能算、能(有限)创造，把人类需要数小时甚至数天的工作压缩到几秒完成。
- AI不断**迭代升级，能力越来越强**，我们怎么办？
- **万变不离其中，以不变应万变！**
  超级助手 **自我提升**

菲尔兹奖获得者、《普林斯顿数学指南》主编高尔斯：“所以我想告诉年轻人，无论人工智能如何发展，坚持深耕数学，夯实基础永远不会错”



威廉·蒂莫西·高尔斯
(1963–)
英国数学家、数学作家

二、课程介绍与考核方式

- 两个学期：一元函数微积分学＋多元函数微积分学

  在微积分课程中，我能学到什么？我应该如何做？

  微积分I：函数 极限与连续、一元函数微积分学、常微分方程
- 学分与地位：6＋5 学分，大量课程的先修课程
- 如何学习
  - ➔ 传统教学：预习＋课堂学习＋课后作业(复盘)
  - ➔ 更多方式：MOOC、网络资料、数学软件(AI)、讨论与表达
- 注意事项：精读教材，思考题，独立认真完成习题，结合指导教程

  强烈建议精读教材，凝练问题，研究问题，解决问题
- 关于手机：课前静音，只用于与学习有关的操作，需要时再使用
  - ➔ 纸笔：课堂练习，记录灵感和问题，做概要笔记 – 传统但仍然有效

课程考核方式

- 成绩构成：平时成绩50%＋期末50%
  - → **平时成绩**：平时作业＋课堂考核＋**小研究**＋中国大学MOOC每章在线测试＋**期中考试**（**平时成绩与考试挂钩**）

  注：课堂考核指参与雨课堂的课堂小测试
- 今天需要完成以下事情：
  - → 加入课程QQ群
  - → 手机下载**中国大学MOOC**，注册并进行认证，加入方式课后在群里公布



雨课程

➔ 搜索，或扫码并关注“雨课堂”微信公众号。

- 点击公众号底部【更多】-【身份绑定】，选择“电子科技大学”进入绑定页面；
- 用户名：**学号**
- 密码：**uestc@学号后六位**







数学科学学院 微积分

7/17

数学学习需要循序渐进的过程，学习思考探究，夯实基础。

三、微积分概述

AI：《微积分的力量》提到了哪些微积分在现代社会的应用？

- 现代微积分一般包含微分学、积分学、级数基本理论和简单微分方程。
- 有时把“微积分”作为“数学分析”的同义语，但数学分析的概念更广，包含：微积分、级数论、函数论、微分方程、积分方程、变分法和泛函分析等。这些学科又称为“分析数学”。

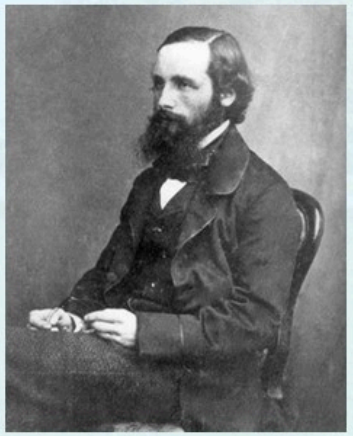
微积分的力量---【美】史蒂夫·斯托加茨

- 微积分是分析学的基础，是现代数学的基础，也是现代理工学科的基础。

$$\oint_S E\cdot \mathrm{d}a=\frac{1}{\varepsilon_0}Q_{enc} \qquad \oint_S B\cdot \mathrm{d}a=0$$

$$\oint_C E\cdot \mathrm{d}l=-\int_S \frac{\partial B}{\partial t}\cdot da \qquad \oint_C E\cdot \mathrm{d}l=\mu_0\left(I_{enc}+\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int_S E\cdot da\right)$$

麦克斯韦方程组



麦克斯韦(1831-1879)

- 早期微积分也称为“无穷小分析”，无穷小是微积分的核心概念。

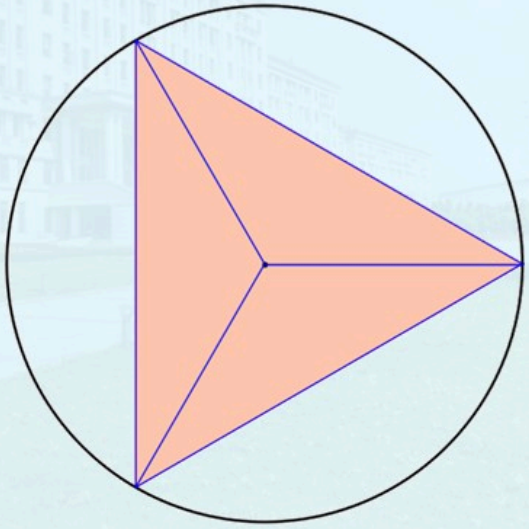
无穷小：一个危险的数学理论如何塑造了现代世界
---【美】阿米尔·亚历山大

1、早期工作：极限思想与穷竭法

- 战国·庄子《庄子·杂篇·天下》
  - ✓ “一尺之棰，日取其半，万世不竭”蕴含着无限思想；
  - ✓ “至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一”蕴含着无穷大和无穷小概念。
- 三国数学家刘徽利用“割圆术”计算圆周率的科学方法，奠定了此后千余年来中国圆周率计算在世界上的领先地位。
  - ✓ 刘徽指出：“割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆合体，则无所失矣。”



庄子
（约公元前369年—约公元前286年）

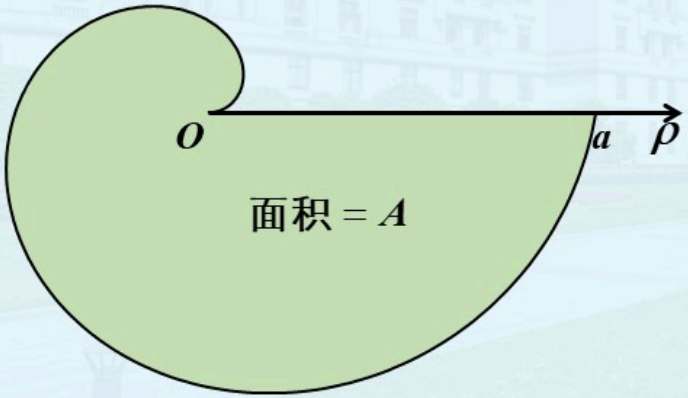




刘徽
（约225年—约295年）

穷竭法是古代计算几何量的一种方法，古希腊安提丰在研究“化圆为方”问题提出用内接正多边形的边数不断加倍的方法来接近圆的面积。该方法缺乏严密的极限理论支撑，但蕴含的极限和积分思想已深深地渗透到了其后的数学中。

阿基米德为穷竭法作出了重要贡献。下面是他求阿基米德螺线(极坐标方程为：$\rho = a\theta (a > 0)$)第一周围成的区域面积的穷竭法：



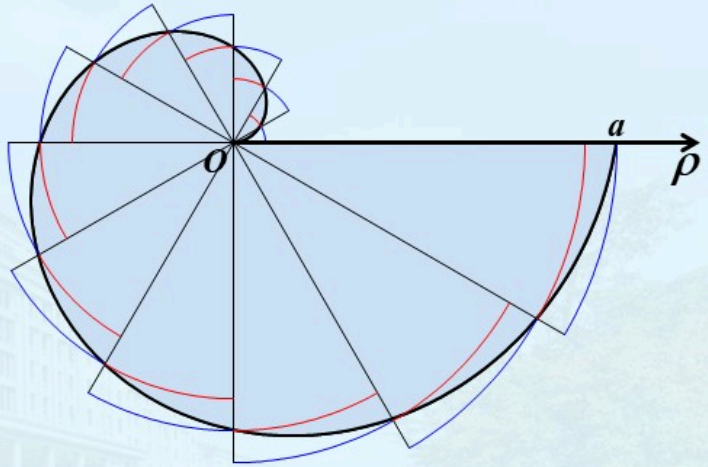


阿基米德（公元前287年—公元前212年), 伟大的古希腊哲学家、百科式科学家、数学家、物理学家、力学家, 静态力学和流体静力学的奠基人. 阿基米德和高斯、牛顿并列为世界三大数学家.

首先把2π分成n份(图中$n=12$),得到顶角为$\frac{2\pi}{n}$的n个内接扇形和外接扇形,其面积之和分别用s_n和S_n表示,经计算有:

$$s_n=\frac{4}{3}\pi^3a^2\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right),$$

$$S_n=\frac{4}{3}\pi^3a^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$



$n=12$

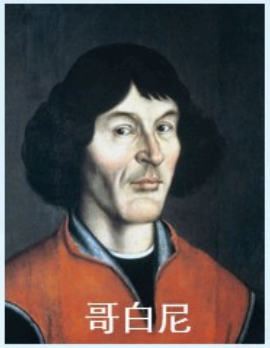
显然$s_n<A<S_n$, 且$s_n<\frac{4}{3}\pi^3a^2<S_n$.

当n越来越大时,s_n和S_n均越来越接近阴影部分的面积,即s_n和S_n穷竭了阴影部分的面积.所以$A=\frac{4}{3}\pi^3a^2$.(反证法的证明过程略)

阿基米德用同样的方法还算出了球的体积和表面积、抛物线弓形的面积以及一些旋转体的体积等数学问题。

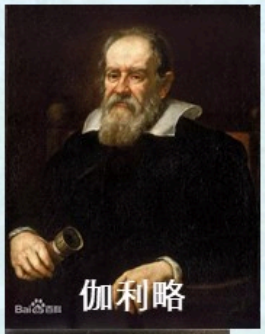
2、微积分的先驱工作

- 近代自然科学革命和科学方法论的产生
  - ✓ 哥白尼《天体运行论》的出版标志自然科学从神学解放；
  - ✓ F.培根倡导的实验方法和归纳方法对近代实验科学的产生和发展有重大影响；
  - ✓ 笛卡尔提出的数学演绎法风行17世纪；
  - ✓ 伽利略把实验和观察运用于具体学科，并证明了其有效性。
- 解析几何的产生和发展
  - ✓ 韦达的符号代数；
  - ✓ 费马的解析几何思想(法国律师和业余数学家)；
  - ✓ 笛卡尔的解析几何思想。


哥白尼


F.培根


笛卡尔


伽利略


韦达


费马

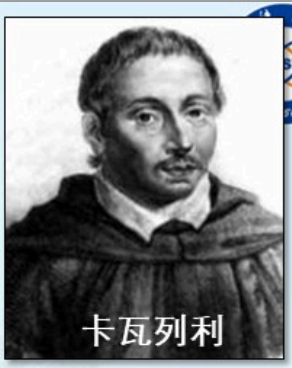
- 积分学的先驱工作
  - ✓ 斯蒂文对穷竭法的修改；
  - ✓ 开普勒的同维无穷小方法；
  - ✓ 卡瓦列利和托里拆利的不可分元法。
- 微分学的先驱工作
  - ✓ 罗伯瓦尔等借助合成运动速度作切线；
  - ✓ 费马借助微小增量作切线；
  - ✓ 费马求极值的方法。
- 微积分学的先驱工作
  - ✓ 帕斯卡等的无穷小方法；
  - ✓ 瓦里斯的算术化。利用代数研究几何问题，引入无穷大；
  - ✓ 巴罗的求切线和求积的互逆性。

“卢卡斯教授”职位



斯蒂文


开普勒


卡瓦列利


托里拆利

罗伯瓦尔


费马


帕斯卡


瓦里斯


巴罗

3、微积分的建立

- 1666年10月，**牛顿**撰写了一本小册子《**流数简论**》。流数实际就是导数。
- 1669年写出《分析学》，正式介绍了微积分，但当时并没有发表。
- 1684年，**莱布尼茨**发表了冗长标题《**一种求极大极小和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算**》的论文，介绍了微分法。并使用拉丁词calculi。十几年后的第一本教科书问世后，”the calculus”正式确定。莱布尼茨还发明了一些现在仍然在使用的微积分符号。
- 其后几十年，**雅各布·伯努利**、**约翰·伯努利**、**莱昂哈德·欧拉**等先驱者对微积分的发展作出了突出贡献。


牛顿


莱布尼茨


雅各布·伯努利


约翰·伯努利


莱昂哈德·欧拉

4、微积分发展的第一次波折

- 17世纪和18世纪的数学家们主要处理等式，缺失现代分析学的支柱 – **不等式**；同时缺少对**广泛函数类**的研究。
- 早期微积分也缺少对**逻辑基础**的关注，那时数学家在使用结果时基本不证明它们的正确性，很多时候直接依靠**数学家的直觉**。

$$\int_a^b \left[\sum_{i=1}^{\infty} f_k(x)\right] dx \stackrel{?}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

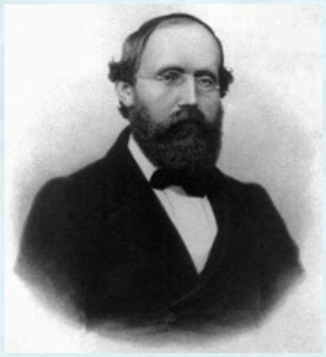
又如**无穷小**，在那时的数学家看来，既是零又不是零，把它作为“逐渐消失”的量。这一点备受乔治·贝克莱（英国著名的哲学家和克罗因教区的主教）的嘲笑。

$$\frac{(x+o)^n - x^n}{o} = \frac{nx^{n-1}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o^2 + \cdots + nxo^{n-1} + o^n}{o}$$
$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o + \cdots + nxo^{n-2} + o^{n-1}$$

5、微积分理论的建立与第二次波折

- 从上面的例子可以看出，微积分建立在一种不牢靠的基础之上。微积分需要像欧几里得几何一样，采用一种精确和严格的方式重建这门学科。
- 19世纪的**柯西**、**黎曼**、**刘维尔**、**魏尔斯特拉斯**确切的定义了微积分中所用的术语，并且证明了到那时为止的各种结果。
- 但在19世纪下半叶，数学家利用这些逻辑工具构造出大量奇特的反例，使得微积分的发展出现了第二次波折。


柯西


黎曼


刘维尔


魏尔斯特拉斯

- 托梅函数在开区间(0,1)上定义为：$r(x)=\begin{cases}1/q, x=p/q\text{为最简形式的有理数}\\ 0, x\text{为无理数}\end{cases}$

可以证明，托梅函数在有理点不连续，在无理点连续。那么它黎曼可积吗？

➔ 一个黎曼可积函数的不连续性可能达到何种地步？

这个问题是19世纪最后四分之一面对的其中一个问题，这说明微积分如果需要发展，还需要进行拓展。

- 这些问题的解决是由**康托尔**、**沃尔泰拉**、**贝尔**和**勒贝格**等学者完成的。

集合论、实数理论、测度论、勒贝格积分 ➔ 现代数学



康托尔



沃尔泰拉



贝尔



勒贝格

对于微积分的建立与发展历史，大家有什么感想和启发呢？