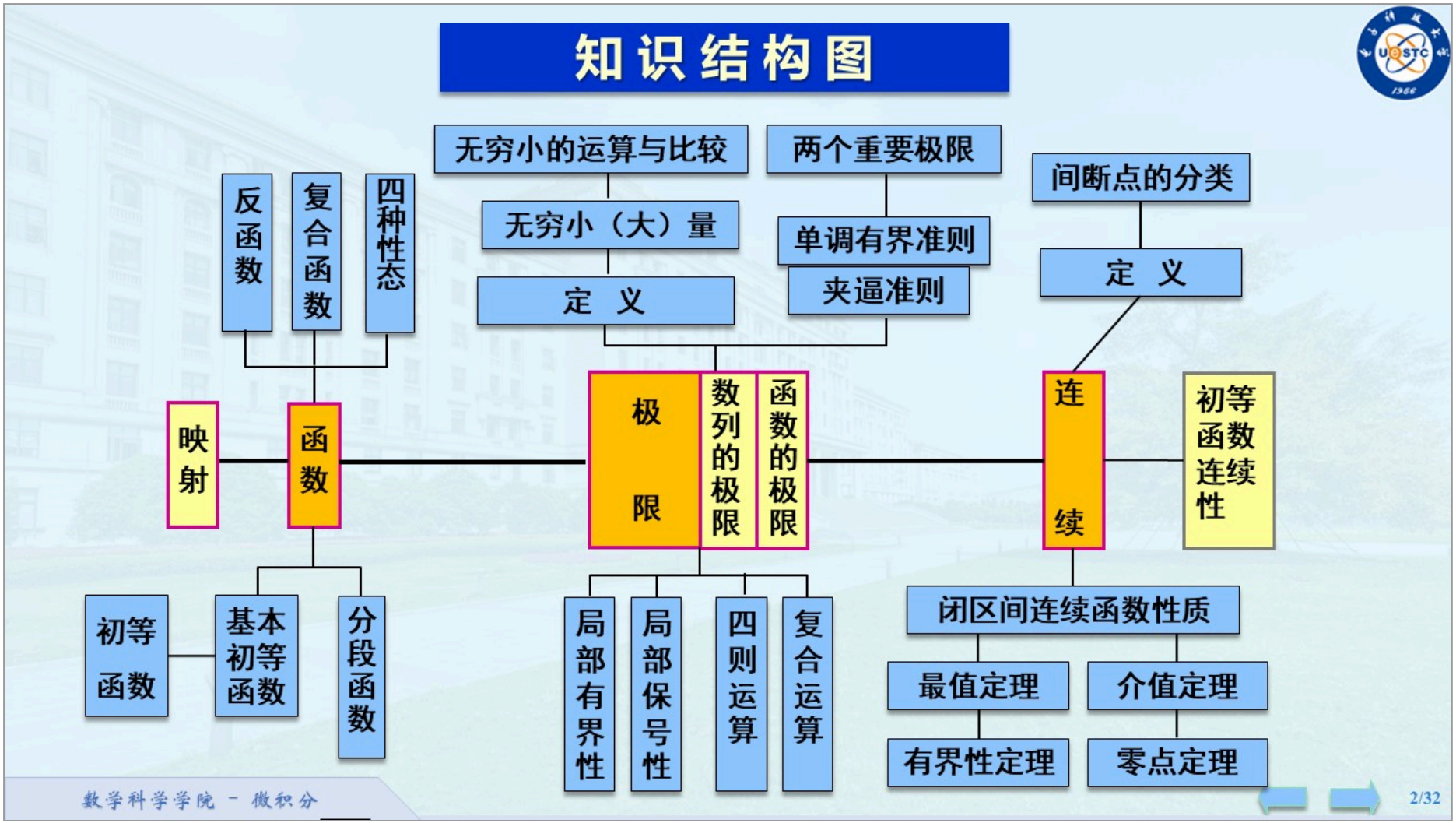

电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China
第一章 函数、极限与连续
习题课
数学科学学院 汪小平


知识结构图
无穷小的运算与比较
两个重要极限
间断点的分类
反函数
复合函数
四种性态
无穷小（大）量
单调有界准则
定 义
夹逼准则
定 义
映射
函数
极限
数列的极限
函数的极限
连续
初等函数连续性
初等函数
基本初等函数
分段函数
局部有界性
局部保号性
四则运算
复合运算
闭区间连续函数性质
最值定理
介值定理
有界性定理
零点定理
数学科学学院 - 微积分
2/32

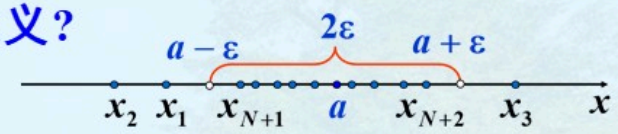
知识点概述

一、极限的概念与性质

- 深刻理解极限概念（共七种）

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 使 $n > N$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 即 $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

1. 如何理解ε与N？　　2. 在一维数轴上如何理解该定义？



3. 当极限存在时, ε的取值有什么技巧, 有什么意义？

- 极限的性质

1. 有界性；　2. 唯一性；　3. 保号性（保序性）；

4. 数列极限与子列极限的关系 或 函数极限与数列极限的关系(海涅Heine定理)

有时会把数列极限转化为函数极限, 这样可以方便使用适用于函数极限的方法, 例如洛必达法则.

二、极限的运算法则

定理 设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;　　(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, 其中$B\neq 0$.

注1：若$f(x)$和$g(x)$都没有极限，则不能用代数和法则(例如$\infty-\infty$)；若两个中有一个有极限，则可以使用代数和法则，这时整体极限存在性取决于第二个.

注2：若$\lim f(x)=0$，$g(x)$未知，则不能用乘法法则(如$0\cdot\infty$型)；若$f(x)$有非0极限，则可以使用乘法法则，这时整体极限存在性取决于第二个.

定理 (复合函数运算法则)

设函数$u=\varphi(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，但在点$x_0$的某去心邻域内，$u=\varphi(x)\neq a$，又$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则$f[\varphi(x)]$当$x\to x_0$时的极限也存在，且$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$. 即

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A$$

极限的换元法

三、无穷小的概念、性质与应用

- 无穷小的概念: 极限为零的变量, 与极限过程密不可分.
- 无穷小与函数极限（数列极限）的关系 $\lim f(x)=0 \Leftrightarrow \lim |f(x)|=0$

$$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x) \Leftrightarrow f(x)-A=\alpha(x) \Leftrightarrow \lim[f(x)-A]=0$$
$$\Leftrightarrow \lim |f(x)-A|=0$$

- 无穷小的运算性质

➔ 有限个无穷小的代数和是无穷小.

➔ 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

✓ 在同一过程中,有极限的变量与无穷小乘积是无穷小.

✓ 常数与无穷小的乘积是无穷小.

✓ 有限个无穷小的乘积也是无穷小.