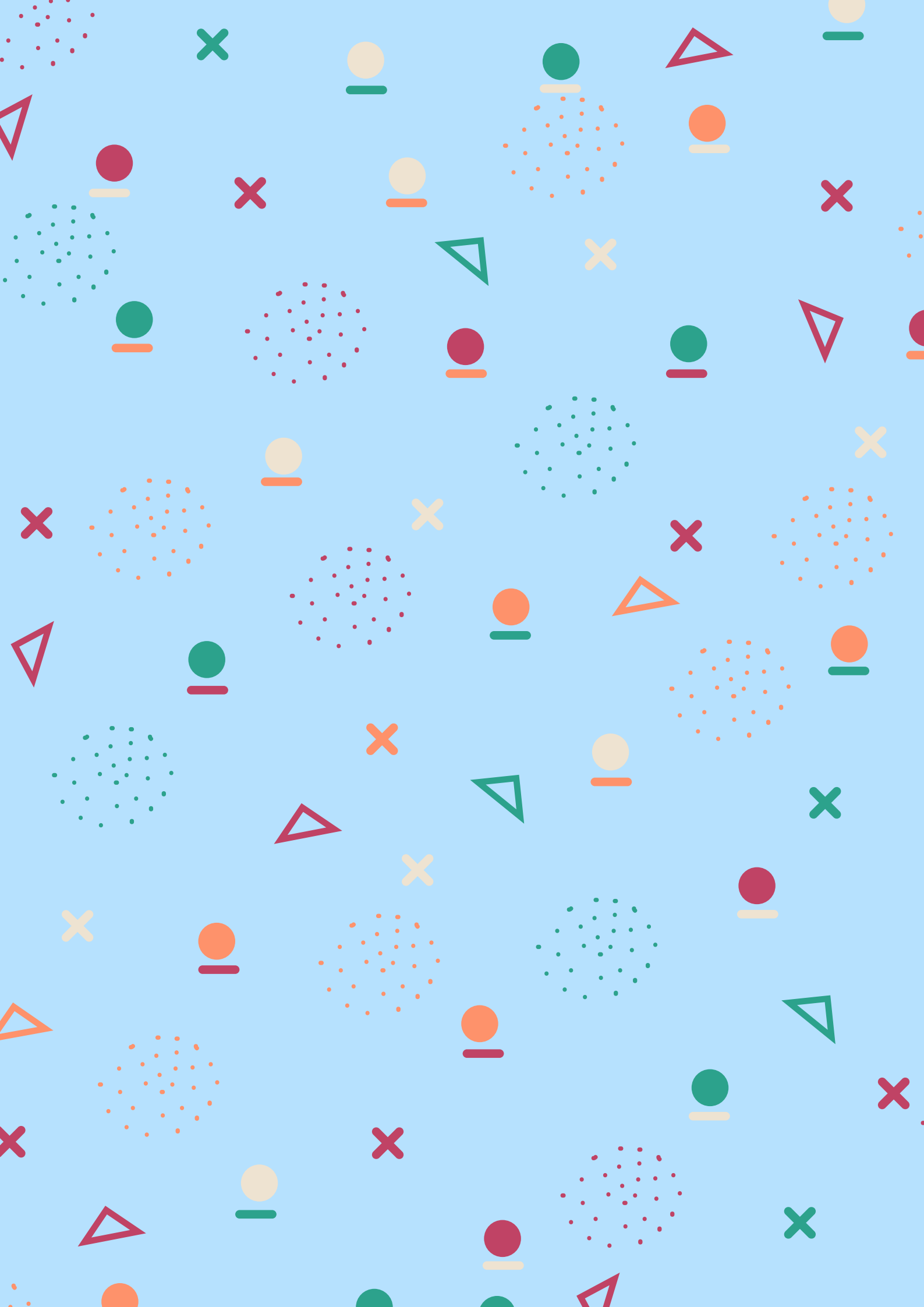


一、矩阵及其初等变换

1.1 加法、数乘 → 线性运算

矩阵的乘法　结合，分配✓　交换 ×　$AB=BA$ "可交换的矩阵"

例6　$A=\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}$　求 A^n → 数学归纳法

$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\\ \vdots\\ y_n=a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n\end{cases}$　由变量 $x_1,\cdots,x_n$ 到 $y_1,\cdots,y_n$ 的线性变换　$Y=AX$

→ 平面直角坐标系中 $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\theta&-s\theta\\s\theta&c\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

由 (x,y) 逆时针转 θ 到 (x',y') 的旋转变换

$A=I$ 时，$Y=AX=X$ 为恒等变换

转置 A^T，→ $(AB)^T=B^TA^T$ → $(A_1\cdots A_n)^T=A_n^T\cdots A_1^T$

证明：①化同型

②化对应元相等

对称　$A^T=A$

反对称　$A^T=-A$

设 n 阶对称矩阵 A,B

证：AB 对称 $\Leftrightarrow AB=BA$

$AB=BA\Rightarrow (AB)^T=B^TA^T=BA=AB$

$(AB)^T=AB\Rightarrow AB=(AB)^T=B^TA^T=BA$

易证：任意矩阵 A，AA^T 与 A^TA 都为对称矩阵

$(AA^T)^T=(A^T)^TA^T=AA^T$

设 A,B 为同阶方阵，A 反称，B 对称，

证：$AB-BA$ 对称

$(AB-BA)^T=(AB)^T-(BA)^T=B^TA^T-A^TB^T$

$=-BA+AB$

1.2

$\begin{cases}a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$　$b_1,\cdots,b_n=0$ 齐次方程组

$\exists b_i\neq 0$ 非齐次方程组

增广矩阵 $\bar{A}=(A\ b)$ → 行初等变换 $\begin{cases}r_i\leftrightarrow r_j\\ kr_i\\ kr_i+r_j\end{cases}$ ⇒ 简化的行阶梯形矩阵

化为行阶梯形矩阵

非零首元都为1

↳ 所在列其余元都为0



x_2,x_4 "自由未知量"

x_1,x_3,x_5 "基本未知量"



解的个数：化为简化行阶梯形

非齐次 $\begin{cases}d_{r+1}\neq 0 & \text{无解}\\ d_{r+1}=0 & \text{有解}\begin{cases}r=n & \text{唯一解}\\ r<n & \text{无穷解}\end{cases}\end{cases}$

齐次 $\forall d_i=0$ $\begin{cases}r=n & \text{唯一解(即零解)}\\ r<n & \text{无穷解}\end{cases}$

A 经有限次初等变换 → B，则 A 与 B 等价　$A\simeq B$　分为行/列等价

初等矩阵：将单位矩阵做一次初等变换　非数值运算：提取主要特征

E_{12}，$E_i(c)$，$E_{ij}(c)$　左乘：行变换，右乘：列变换　$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2&2\\3+4&4\end{pmatrix}$　$E_{12}(1)$ 是从2到加到1到

1.3 逆矩阵　引入"倒数"

$AB=BA=I$，

A 为可逆矩阵，其逆唯一

$(A^{-1})^{-1}=A$，$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

$ABB^{-1}A^{-1}=I$　$A^T(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=I^T=I$

$A=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_n)$ → $A^{-1}=\mathrm{diag}(\frac{1}{d_1},\cdots,\frac{1}{d_n})$

初等矩阵的逆

$E_{ij}^{-1}=E_{ij}$

$E_i(c)^{-1}=E_i(\frac{1}{c})$

$E_{ij}(c)^{-1}=E_{ij}(-c)$

A 为 n 阶方阵.

A可逆 $\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $AX=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ A与 I 行等价

$\Leftrightarrow$ A可表示为有限初等矩阵的乘积

$\Leftrightarrow$ 非齐次方程组 $AX=b$ 有唯一解 $X=A^{-1}b$

↳ 证：必要性：若A不可逆，$AX=0$ 有非零解 $Z\neq 0$

充分易证

令 $Y=X+Z$，$AY=AX+AZ=b+0=b$

故 Y 也为 $AX=b$ 的解，矛盾

$1\Rightarrow 2$ 设A可逆且X为 $AX=0$ 的解

$X=IX=A^{-1}AX=A^{-1}\cdot 0=0$ 故只有零解 ($r=n$)

$2\Rightarrow 3$ 设 $AX=0$ 只有零解 → 简化行阶梯形为 I

$3\Rightarrow 4$ $E_k\cdots E_1A=I$, $\Rightarrow A=E_1^{-1}\cdots E_k^{-1}$

$4\Rightarrow 1$ $A=E_1^{-1}\cdots E_k^{-1}\Rightarrow E_k\cdots E_1=A^{-1}$

证：只需 $BA=I$ (or $AB=I$) 即可知 A,B 互为逆矩阵

方程组 $AX=0$, $X=IX=BAX=0$ 故只有零解，A可逆

$B=BAA^{-1}=IA^{-1}=A^{-1}$, B也可逆 $AB=ABAA^{-1}=AIA^{-1}=I$

例1, $A^2-3A-10I=0$, 证：A, A-4I 都可逆，并求

$A(A-3I)=10I$ $(A-4I)(A+I)=6I$

$A\cdot\frac{1}{10}(A-3I)=I$ $(A-4I)\cdot\frac{1}{6}(A+I)=I$

用逆求方程组 $AX=b$ 解：$X=A^{-1}b$

$(A\,|\,I)\rightarrow(I\,|\,A^{-1})$

#RGB, YUV 颜色空间

#敏感度/扰动 分析

移项注意顺序

$AXB=C$: $X=A^{-1}CB^{-1}$

若 $AX=B$ $(A\,|\,B)\rightarrow(I\,|\,A^{-1}B)$

同阶均可逆

1.4 分块矩阵 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$

↳ 使分块后出现便于利用的矩阵：kI/0…

A 中非零元素都集中在对角线附近

可以分块为 块(准)对角矩阵

每块都是方阵 $A=\mathrm{diag}(A_1,\cdots,A_n)$

1. $A^k=\mathrm{diag}(A_1^k,\cdots,A_n^k)$
2. $A^{-1}=\mathrm{diag}(A_1^{-1},\cdots,A_n^{-1})$

↓ 分块反对角

$$\begin{pmatrix}&&A_1\\&\iddots&\\A_n&&\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}&&A_n^{-1}\\&\iddots&\\A_1^{-1}&&\end{pmatrix}$$

A, B 同阶，相同分法 $A+B=\begin{pmatrix}A_{11}+B_{11}&\cdots&A_{1n}+B_{1n}\\\vdots&&\vdots\\A_{m1}+B_{m1}&\cdots&A_{mn}+B_{mn}\end{pmatrix}$

↳ A的分法与B行分法同

$$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}B_{11}\\B_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}\\A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1s}\\\vdots&&\vdots\\A_{r1}&\cdots&A_{rs}\end{pmatrix}\rightarrow A^T=\begin{pmatrix}A_{11}^T&\cdots&A_{r1}^T\\\vdots&&\vdots\\A_{1s}^T&\cdots&A_{rs}^T\end{pmatrix}$$

$B=\begin{pmatrix}\vdots\\\vdots\end{pmatrix}\rightarrow(b_1\,b_2\cdots b_n)$ → 若 $AB=0$, 则 $Ab_i=0$

$AB=(Ab_1,Ab_2,\cdots,Ab_n)$ 每列 b_i 都为 $AX=0$ 的解

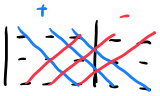
二、行列式 为解方程组 方程组的系数行列式

2.1 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ $\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{\det A_1}{\det A}\\x_2=\frac{\det A_2}{\det A}\end{cases}$

$\det A_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}$

$\det A_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}$

→ 三阶 

解也可以写成 $\det\frac{A_i}{A}$

A_i 的列换为常数列

由低阶定义高阶

$n=1$, $\det A=a_{11}$

$n\geq 2$, $\det A=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$, $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$

① $\begin{vmatrix}\ddots&\\&a_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}&\ddots\\a_{nn}&\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&&\\&\ddots&\\&&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\cdots a_{nn}$

② $\det I=1$, $\det(kI_n)=k^n$

③ $\begin{vmatrix}&&a_1\\&\iddots&\\a_n&&\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}&&a_n\\&\iddots&\\a_1&&\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n$ 推导！

2.2 性质

- 可把任意行展开
- 某行全零 or 某两行对应元全等, $D=0$
- or 成比例

$$\begin{vmatrix}a_i+b_i\\c_i\\d_i\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_i\\c_i\\d_i\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_i\\c_i\\d_i\end{vmatrix}$$

↳ 初等变换的影响

$\det(E_i(k)A)=k\det A$ ∽ $\det E_i(c)=c(\neq 0)$

$\det(E_{ij}(k)A)=\det A$ ∽ $\det E_{ij}(c)=1$

$\det(E_{ij}A)=-\det A$ ∽ $\det E_{ij}=-1$

$\Rightarrow\det(E_k\cdots E_1A)=(\det E_k)\cdots(\det E_1)(\det A)$

+

- $\det A^T=\det A$ 证：若A不可逆 $\det A=\det A^T=0$
- A可逆 $\Leftrightarrow\det A\neq 0$ 若A可逆 $\det A^T=\det(E_k^T\cdots E_1^T)=(\det E_k^T)\cdots(\det E_1^T)=(\det E_k)\cdots(\det E_1)=\det(E_k\cdots E_1)=\det A$
- $\det(AB)=(\det A)(\det B)\rightarrow\det(A_1\cdots A_k)=(\det A_1)\cdots(\det A_k)$
- $(\det A)(\det A^{-1})=\det I=1$
  - ↳ $\det A^{-1}=\frac{1}{\det A}$, $\det A^{-1}=(\det A)^{-1}$

例3：奇数阶反对称矩阵 A，$\det A=0$

$A^T=-A$，$\det A=\det A^T=\det(-A)=(-1)^n\det A=-\det A$

例6：$D_n=\begin{vmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y & y & \cdots & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & \cdots & y \\ x+(n-1)y & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x+(n-1)y & y & \cdots & x \end{vmatrix}=[x+(n-1)y]\begin{vmatrix} 1 & y & \cdots & y \\ 1 & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y & \cdots & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & \cdots & y \\ 0 & x-y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix}=[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$

例8：证 Vand. $V_n=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$

$V_n\xrightarrow{-x_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}=\cdots$

例9：$D_n=\begin{vmatrix} 0 & x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}\xrightarrow{D^T}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n \\ -1 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$

$m=0$ 时 $D_n=\begin{cases} x_1, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases}$

$m\neq 0$ 时 $\begin{vmatrix} 1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^n x_i & x_1 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}=(-m)^n\left(1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^n x_i\right)=(-1)^{n-1}m^{n-1}\left(\sum_{i=1}^n x_i-m\right)$

2.3 拉普拉斯定理

$D_n=\begin{vmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix}$（k 行）→ k阶子式 S；n-k阶余子式 M；A为代数余子式 $A=(-1)^{(s_1+\cdots+s_k)+(j_1+\cdots+j_k)}M$

任取定 k 行，取遍 C_n^k 种 k 列

$D_n=\sum_{i=1}^{C_n^k}S_iA_i$

处理大块 0 的矩阵

$A=\begin{pmatrix} B_{m\times m} & 0 \\ * & C_{n\times n} \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} B_{m\times m} & * \\ 0 & C_{n\times n} \end{pmatrix}\rightarrow \det A=(\det B)(\det C)$

例2 $A=\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ B、D 均可逆，求 A^{-1}

$\det A=(\det B)(\det D)\neq 0$，A 可逆

设 $A^{-1}=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$，$AA^{-1}=I$

解得 …，$A^{-1}=\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \end{pmatrix}$

2.4 克拉默法则（Cramer）

引理1 $\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk}=0$（不同行，不对应），对比 $\sum_{k=1}^n a_{jk}A_{jk}=\det A$

引理2. $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ 为 A 的伴随矩阵

$AA^*=A^*A=(\det A)1=\begin{pmatrix} \det A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det A \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ A可逆即 $\det A\neq 0$：借助 A^* 简明表达 A^{-1}

$A^{-1}=\frac{A^*}{\det A}$　　$(A^*)^{-1}=\frac{A}{\det A}$

例3 $A_{3\times 3}$，$\det A=\frac{1}{3}$，求 $\det[(2A)^{-1}-3A^*]$

$(2A)^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$，$A^*=\det A\cdot A^{-1}=\frac{1}{3}A^{-1}$

$\det\left(-\frac{1}{2}A^{-1}\right)=-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\det A}=-\frac{3}{8}$

例4 A可逆，A,B同型，$A^*B=A^{-1}+B$，证B可逆，当 $A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求B

$(A^*-1)B=A^{-1}$，$\det(A^*-1)\det B=\det A^{-1}\neq 0$

$\therefore B=(A^*-1)^{-1}A^{-1}=[A(A^*-1)]^{-1}=[\det(A)1-A]^{-1}=6\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

克拉默法则：$A_{n\times n}$ 可逆，$AX=b$ 有唯一解 $X=(x_1,\cdots,x_n)^T$

$x_j=\frac{\det A_j}{\det A}$ → 用 b 代替 $\det A$ 中第 j 列

证：$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=X=A^{-1}b=\frac{1}{\det A}A^*b=\frac{1}{\det A}(b_1A_{1j}+\cdots+b_nA_{nj})=\frac{\det A_j}{\det A}$

2.5 秩 $R(A)=r$ 最高阶非零子式阶数

用定义求秩计算量大

要计算得到，（存在1个r阶子式即可）

1. 初等变换不改变秩 → 易求
2. 行阶梯形非零行数即为秩

求 A 和 $\bar{A}=(A|b)$ 的秩

大小比较 → 方程组解的个数

$R(\overline{A})=R(A)$

$R(AF)=R[(AF)^T]=R[F^TA^T]=R[A^T]=R(A)$

有限次行/列初等变换秩不变

P,Q 可逆，$R(PAQ)=R(E_k\cdots E_1AF_1\cdots F_k)=R(A)$

基本性质：

1. $R(A)=0\Leftrightarrow A=0$
2. $R(A)\ge r\Leftrightarrow$ A中有r阶子式不为零
3. $R(A)\le r\Leftrightarrow$ A中所有r+1阶子式都为零
4. $R(kA)=\begin{cases} 0, & k=0 \\ R(A), & k\neq 0 \end{cases}$
5. $A_{m\times n}$，$0\le R(A)\le\min\{m,n\}$
6. $R(A^T)=R(A)$
7. A可逆 $\Leftrightarrow\det A\neq 0\Leftrightarrow R(A)=n$ 满秩
   A不可逆 $\Leftrightarrow\det A=0\Leftrightarrow R(A)<n$ 降秩

$A_{m\times n}$ 行列变换 $E_k\cdots E_1 A F_1\cdots F_k$ (P A Q)

$R(A)=r$

$A=P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}$

标准形

$A\cong B$ $\therefore$ A与其标准形等价

$A\overset{P}{\cong}B\overset{Q}{\cong}\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow R(A)=R(B)=r$

同型

$AB=P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}QB=P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C\\ C_2\end{pmatrix}_{r行}=P\begin{pmatrix} C\\ 0\end{pmatrix}$ (C)

$R(AB)=R\left[P\begin{pmatrix} C\\ 0\end{pmatrix}\right]\le r=R(A)$

$R(AB)=R[(AB)^T]=R[B^TA^T]\le R(B^T)=R(B)$

$R(AB)\le \min\{R(A),R(B)\}$

例2 $A_{n\times n}$ $n\ge 2$ 证 $R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n\\ 0, & R(A)<n-1\\ 1, & R(A)=n-1\end{cases}$

① $R(A)=n$, $\det A\neq 0$

$|A||A^*|=|A|^n\neq 0$

$|A^*|\neq 0$, $R(A^*)=n$

② $R(A)=n-1$, 则 $|A_{ij}|\neq 0$

$A^*\neq 0$, $R(A^*)\ge 1$ (2)

③ $R(A)=n-1$

$A=P\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$

$A^*=Q^*\underbrace{\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^*}P^*$

$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \\ 0 & & 1\end{vmatrix}$

$R(A^*)=1$