线代

错题本

单元检测题一

填空

1. $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$, $BA=B+2I$, $B=$?

移项 $B=2(A-I)^{-1}$ $A-I=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$

$M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $M^{-1}=\frac{M^*}{|M|}=\frac{\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}}{ad-bc}$

$\frac{1}{|A-I|}\cdot(A-I)^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$

2. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为三维列向量

$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $|A|=1$, 求 $|B|$

$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\ \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$

把 B 的每一列看成 A 的三列进行线性组合

↳ $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}=A\cdot C$

$|B|=|A\cdot C|=|A||C|=|C|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&1&3\end{vmatrix}=2$

3. $n+1$ 阶 $X=\begin{pmatrix}A_1&\alpha_1\\\beta_1&1\end{pmatrix}$ 可逆, 记 $X^{-1}=\begin{pmatrix}A_2&\alpha_2\\\beta_2&a\end{pmatrix}$ 未知

其中 A_1 为 n 阶可逆, 求 a.

小结论 $\frac{1}{a}=1-\beta_1A_1^{-1}\alpha_1$

$X\cdot X^{-1}=\begin{pmatrix}I_n&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&\alpha_1\\\beta_1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_2&\alpha_2\\\beta_2&a\end{pmatrix}$ 又有 $\begin{cases}\beta_1A_2+\beta_2=0\\A_1\alpha_2+\alpha_1a=0\end{cases}\Rightarrow\alpha_2=-A_1^{-1}\alpha_1a$ 代入移项

$1=\beta_1\alpha_2+a$ $a=\frac{1}{1-\beta_1A_1^{-1}\alpha_1}$

选择

1. 选错误 A 为 n 阶

$AA^*=A^*A$ ✓ $AA^T=A^TA$ ✗ ⇝ 对称矩阵 $A^T=A$ eg. $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $A^TA=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $AA^T=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$

$(A+1)(A-1)=A^2-1^2$ ✓ $A^mA^n=A^nA^m$ ✓ ⇝ 正交矩阵 $A^TA=AA^T=I$

$R(A)=R(A^T)=R(AA^T)=R(A^TA)$ 理解"维度"

2. A,B 均 n 阶非零, $AB=0$

则 A 与 B 的秩: 必有1个为零;

$<n,=n$; $\le n,<n$; $=n,=n$。

首先 $AB=0$, $R(A)+R(B)\le n$ ⇒ 假设 $R(B)=n$, $A^{-1}AB=A^{-1}\cdot0=0$ 矛盾

又 A,B 非零, $R(A),R(B)\ge1$ 同理 $R(A),R(B)<n$

4. A n 阶, B m 阶, $D=\begin{pmatrix}C&A\\B&0\end{pmatrix}$, 求 $|D|$

$|D|=(-1)^?|A||B|$

法1: 相当于 $\begin{matrix}1\\n\end{matrix}\begin{pmatrix}C&A\\B&0\end{pmatrix}$ 交换 $\to\begin{pmatrix}B&0\\C&A\end{pmatrix}$

n 行全向上移, 每个要跨 n 行, 移 $m\times n$ 次相邻行.

$\therefore|D|=(-1)^{mn}|A||B|$

5. $A=(a_{ij})_{3\times3}$, $A^*=A^T$,

a_{11},a_{12},a_{13} 为3相等正数, 求 a_{11}

$A^*=A^T\Rightarrow|A^*|=|A|^{n-1}=|A^T|$ $\therefore|A|^2=|A|$, $|A|=1$ 或 $|A|=0$ (舍, a_{21},a_{31} 为正, $A_{21}=\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\neq0$)

$A_{ij}=a_{ij}$ 正交矩阵 ↳ $A\cdot A^*=|A|I=I=AA^T$ ⇒ $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=1$ $a_{11}=\frac{\sqrt3}{3}$

简答题

1. $A=\begin{bmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{bmatrix}$, $R(A)=3$, 求 k.

$R(A)<3$, 故 $|A|=0=\begin{vmatrix}k+3&k+3&k+3&k+3\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{vmatrix}=(k+3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&k-1&0&0\\0&0&k-1&0\\0&0&0&k-1\end{vmatrix}=(k+3)(k-1)^3=0$

若 $k-1\neq0$ 即 $k=1$, $R(A)=1$, 舍 → $R(A)<4$ 快

若 $k+3=0$ 即 $k=-3$, $A\to\begin{vmatrix}-3&1&1&1\\1&-3&1&1\\1&1&-3&1\\1&1&1&-3\end{vmatrix}$, 存在子式 $\begin{vmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&-3\end{vmatrix}=-16$, $R(A)=3$.

2. B 为元素全为1的 n 阶 ($n\ge2$) 矩阵

证: (1) $B^k=n^{k-1}B$, (2) $(I-B)^{-1}=I-\frac{1}{n-1}B$

(1) 数学归纳法

设 $B=(b_{ij})_{n\times n}$, $b_{ij}=1$

$k=2$ 成立: $b_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}b_{kj}=n$, $B^2=nB$

假设 $k=t$ 时 $B^t=n^{t-1}B$

$B^{t+1}=B^t\cdot B=n^{t-1}B\cdot B=n^{t-1}nB=n^tB$

故 $\forall k\ge2$, $B^k=n^{k-1}B$

(2) $(1-B)(1-\frac{1}{n-1}B)=1-\frac{n}{n-1}B+\frac{1}{n-1}B^2$ ($B^2=nB$)

$=I+B\cdot0=I$ 得证.

3. 计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$ $\xrightarrow[-ar_1+r_2]{-a^2r_3+r_4}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ 0 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a & \\ (b^2+a^2)(b+a) & (c^2+a^2)(c+a) & (d^2+a^2)(d+a) & \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & (c+a)(c^2-b^2) & (d+a)(d^2-b^2) \end{vmatrix}$

通法

$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c+a & d+a \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$

a^4替换a^3后多一项

标准

4. $D_n = |a_{ij}|$, $a_{ij} = |i-j|$, 求 D_n

$D_1 = |0| = 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $D_3 = 4$, $D_4 = -12$

$= (-1)^{n-1} 2^{n-2} (n-1)$

严谨: $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} \\ -1 \\ -1 \\ \\ -1 \end{matrix}$ $= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} \\ +1 \\ +1 \\ \\ +1 \end{matrix}$ $= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{vmatrix}$ $\frac{1}{2}$ $= \begin{vmatrix} \frac{n-1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{vmatrix}$

$\therefore D_n = \begin{cases} 0, & n=1 \\ (-1)^{n-1} 2^{n-2} (n-1), & n \geq 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 求 λ, μ。 $\mu = 1$ 时求全部非零解

$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{pmatrix}$ $AX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A| = 0$, $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 1 & 2\mu & 1 \end{vmatrix} = -\mu(\lambda - 1) = 0$

故 $\mu = 0$ 或 $\lambda = 1$。 $\to \mu = 0, \lambda = 1$ $A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

令 $x_3 = k$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\leftrightarrow$ 即为全部非零解

6. n阶A,B, 有 $AB = A + 2B$, (1)证 $(B-1)$ 可逆 (2)设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求 B

(1) $A(B-1) - 2B = 0$ $\overset{+2I}{\Rightarrow}$ $(A-2I)(B-1) = 2I$

$(B-1)^{-1} = \frac{1}{2}(A-2I)$

(2) $B = 2(A-2I)^{-1} + I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

发现: $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = PA$

7. n元线性方程组 $Ax = b$.

$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

(1) 证明: $|A| = (n+1)a^n$

(2) $a = ?$ 时方程组有唯一解, 求此时 x_1

(3) $a = ?$ 时方程组有无穷解, 求解.

(1) 直接展开, 找递推 $D_1 = |2a| = 2a$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2$, $D_2 - aD_1 = a^2$

$D_n = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2} \Rightarrow (D_n - aD_{n-1}) = a(D_{n-1} - aD_{n-2})$ 符合 $\Rightarrow D_n - aD_{n-1} = a^n$.

$\Rightarrow D_n = aD_{n-1} + a^n$, $\frac{D_n}{a^n} = \frac{D_{n-1}}{a^{n-1}} + 1$, $D_n = (n+1)a^n$

(2) 唯一解 $\Rightarrow |A| = (n+1)a^n \neq 0$, $a \neq 0$, $x_1 = \frac{D_1'}{|A|} = \frac{1}{D_n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2a & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & a^2 & 2a & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a^2 & \ddots & 1 \\ & & & & 2a \end{vmatrix} = \frac{D_{n-1}}{D_n} = \frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n} = \frac{n}{(n+1)a}$

(3) 无穷解 $\Rightarrow |A| = 0$, $a = 0$, $(A|b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $R(A) = R(A|b) = n-1 < n$, $\begin{cases} x_1 = c, \text{ 任意} \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \cdots = x_n = 0 \end{cases}$; $x = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

8. A n阶可逆, $\alpha_{n\times 1}$, $b_{1\times 1}$

记 $P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}$

(1) 计算 PQ

(2) 证: Q 可逆 $\Leftrightarrow \alpha^T A^{-1} \alpha \neq b$

(1) $PQ = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ |A|\alpha^T - \alpha^T A^* A & -\alpha^T A^* \alpha + |A| b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & |A|(b - \alpha^T A^{-1} \alpha) \end{pmatrix}$

(2) $|PQ| = |A|^2 (b - \alpha^T A \alpha) = |P||Q| = \underset{\neq 0}{|A|}|Q|$

$\Rightarrow |Q| = |A|(b - \alpha^T A^{-1} \alpha)$

必要性: 若 Q 可逆, $|Q| \neq 0$ 充分性: $\alpha^T A^{-1} \alpha \neq b$, $|Q| \neq 0$, Q 可逆

$\because |A| \neq 0$, $\therefore b - \alpha^T A^{-1} \alpha \neq 0$ 得证