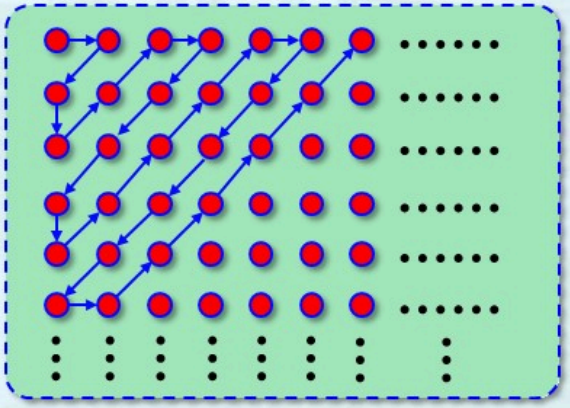
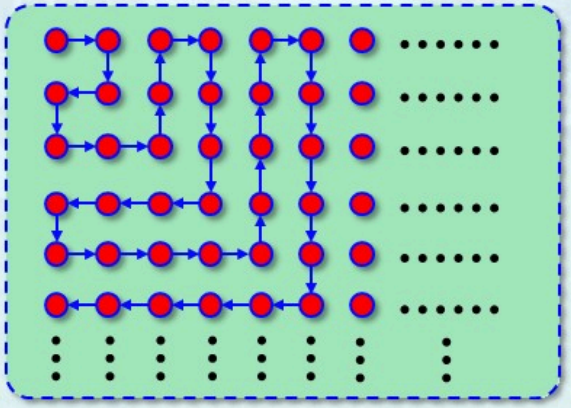
7、集合概念在无限集上的推广

- 如果两个集合之间能形成一一映射,则称两个集合是**等势的**.
- 集合元素的“个数”称为**基数**.自然数集N的基数定义为$\aleph_0$(**阿列夫零**).
- 有限集合,或与自然数集等势的集合称为**可数集合**(或可列集合).

✓ 有限集合不可能与其真子集等势;　✓ 无限集合可以与其真子集等势;

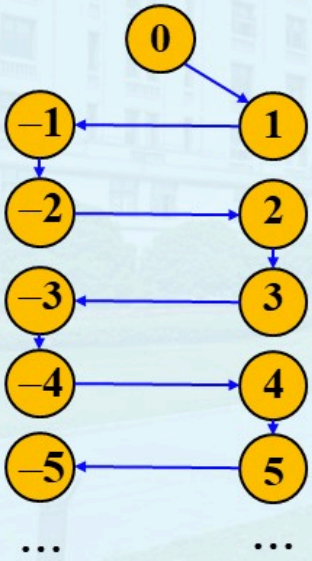
✓ 可数个可数集合的并是可数集合;





- ✓ 有理数是可数集合.(为什么?)
- ● 实数集合是不可数集合,其基数定义为$\aleph$(阿列夫).

整数集合: … –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 …



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
0	1	–1	–2	2	3	–3	–4	4	5	–5	…

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & -\frac{3}{1} & -\frac{2}{1} & -\frac{1}{1} & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \cdots \\
\cdots & -\frac{3}{2} & -\frac{2}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{0}{2} & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \cdots \\
\cdots & -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{0}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

二、数集

1、概念

元素全部是数的集合称为**数集**.

N----自然数集　　Z----整数集　　Q----有理数集　　R----实数集

2、逻辑量词:

$\forall$:表示"对每一个…" 或"对任意的…" 或"对所有的…"

$\exists$:表示"存在…"

例如: $\forall x \in R, \exists y \in R,$使得$x + y = 4.$

3、绝对值

$$\forall x \in R, |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

性质：

(1) $|x| \geq 0,\ \ |-x| = |x|.$

(2) $-|x| \leq x \leq |x|.$

(3) $\sqrt{x^2} = |x|.$

(4) 若$a > 0$，则 $\{x \mid |x| < a\} = \{x \mid -a < x < a\},$

$$\{x \mid |x| > a\} = \{x \mid x < -a\} \cup \{x \mid x > a\}.$$

(5) $|x+y| \leq |x| + |y|,\ \ |x-y| \geq |x| - |y|.$

$$||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$$

(6) $|xy| = |x| \cdot |y|,\ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, (y \neq 0).$

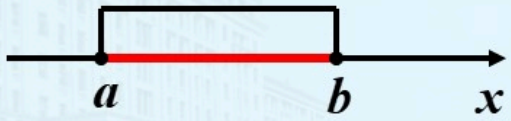
4、区间

区间：是指介于某两个实数之间的全体实数.这两个实数叫做区间的端点.

$\forall a,b\in R$, 且$a<b$. $\{x|a<x<b\}$称为开区间, 记作(a,b).

$\{x|a\le x\le b\}$称为闭区间, 记作$[a,b]$.





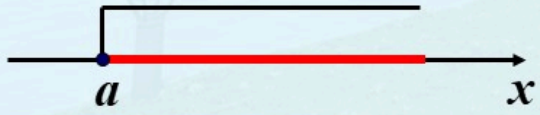
$\{x|a\le x<b\}$称为半开区间, 记作$[a,b)$.

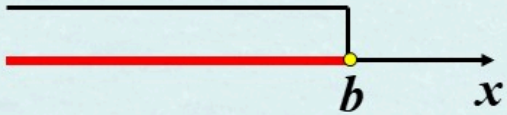
$\{x|a<x\le b\}$称为半开区间, 记作$(a,b]$.

有限区间

$[a,+\infty)=\{x|a\le x\}$　　$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$

无限区间



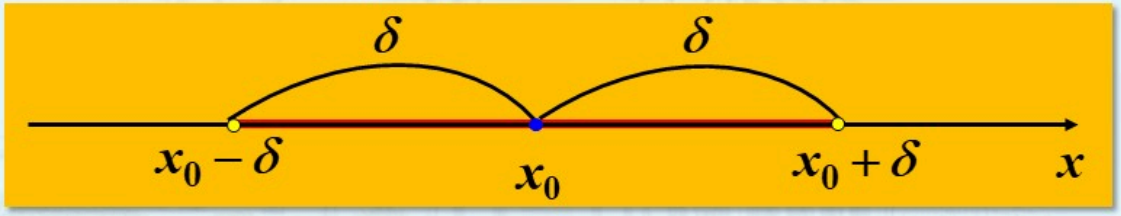


5、邻域:

设x_0与δ是两个实数,且$\delta>0$. 数集$\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}$ 称为点x_0的δ邻域,

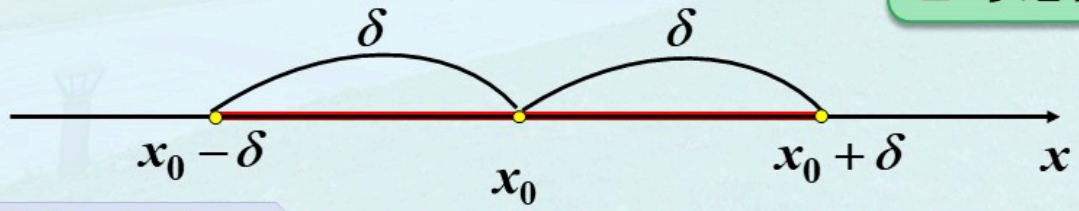
点x_0叫做邻域的中心, δ叫做邻域的半径.

$$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta\}.$$



点x_0的去心δ邻域,记作$\mathring{U}(x_0,\delta)$.

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}.$$



在不强调邻域半径的情况下,
也可记作:$U(x_0)$, $\mathring{U}(x_0)$.

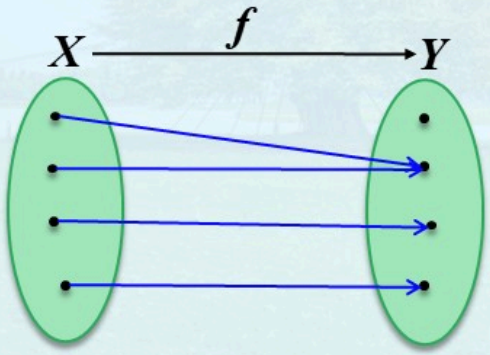
三、映射

1、定义

设X与Y为两个非空集合,如果按照某种确定的法则f,对于集合X中的任何一个元素x,在集合Y中都有惟一的元素y与之对应,则称f为从集合X到集合Y的映射,记作

$$f: X \to Y \quad \text{或} \quad f: x \mapsto y = f(x), x \in X$$

其中元素y称为元素x在映射f下的像,元素x称为元素y在映射f下的原像(或逆像).



X称为映射f的定义域,记作$D(f)=X$,Y中像y的全体称为映射f的值域,记为$R(f)$.

注意:$R(f) \subseteq Y$,像唯一,原像不一定唯一,

不要求集合Y中每一个元素都有原像.

2、满射

如果映射f的值域$R(f)=Y$,则称f是X到Y上的映射或X到Y的满射.即Y中每个元素都有原像.

3、单射

如果对于每个$y\in R(f)$,有唯一的原像$x\in X$,则称f是X到Y的单射.即要求不同x有不同的像.

4、一一映射

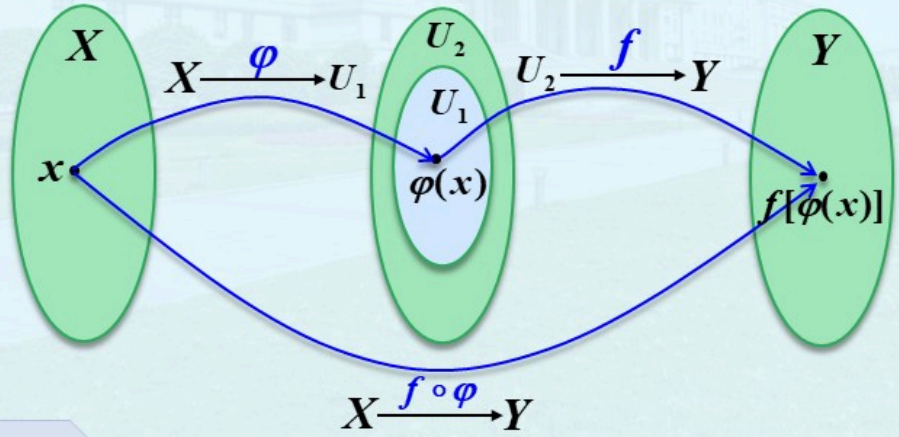
如果从集合X到集合Y的映射f,既是单射又是满射,则称f为从X到Y的一一映射.

映射的同义词: 变换, 算子

5、复合映射

设φ是从集合X到集合U_1的映射，f是从集合$U_2(U_1 \subseteq U_2)$到集合Y的映射，则从X到Y存在一种确定的法则，使得对集合X中的任何一个元素x，在集合Y中都有惟一的元素y与之对应，这里$y = f[\varphi(x)]$，则称从X到Y的这种映射为复合映射(或映射的乘积).

记 $f \circ \varphi : X \to Y$ 或 $f \circ \varphi : x \mapsto y = f[\varphi(x)], x \in X$



6、逆映射

设f为从集合X到集合Y的一一映射,对于Y中的任何一个y,在X中都有惟一的元素x与之对应,这里的x满足$f(x)=y$,则称从Y到X的这种映射为f的逆映射.记作

$$f^{-1}: Y \to X$$

或 $$f^{-1}: y \mid\to x = f^{-1}(y), y \in Y$$

由定义有:

$$f^{-1}[f(x)] = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$f[f^{-1}(y)] = (f \circ f^{-1})(y) = y$$

四、函数

定义：若X和Y为两个非空实数集，f为X到Y的一个映射，则称f为定义在数集X上的函数.记作：

$$f: X \to Y \text{ 或 } f: x \mapsto y = f(x), x \in X$$

x称为自变量，y称为因变量.集合X称为函数的定义域，也可以记作D_f.当$x_0 \in D_f$时，与x_0对应的数值y_0称为函数$y = f(x)$在$x = x_0$处的函数值，记作$y_0 = f(x_0)$或$y_0 = y\big|_{x=x_0}$.

全体函数值的集合$Z_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$，称为函数的值域.

当$X \subseteq R$，$Y \subseteq R$时，$f(x)$为一元函数；

当$X \subseteq R^2$，$Y \subseteq R$时，f为二元函数，记为$y = f(x_1, x_2)$；

当$X \subseteq R^n$，$Y \subseteq R$时，f为n元函数，记为$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

函数的两个要素：

- 对应法则f；
- 定义域D_f.

两个函数只要f和D_f相同,则这两个函数相等.

例如：

$f(x)=1, x\in(-\infty,+\infty)$　　$h(x)=\sin^2 x+\cos^2 x, x\in(-\infty,+\infty)$

表现形式不同，却是两个相同的函数.

$y=x$与$y=\dfrac{x^2}{x}$不是相同的函数,因为定义域不同.

定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总是只有一个，叫做**单值函数**，否则叫做**多值函数**.

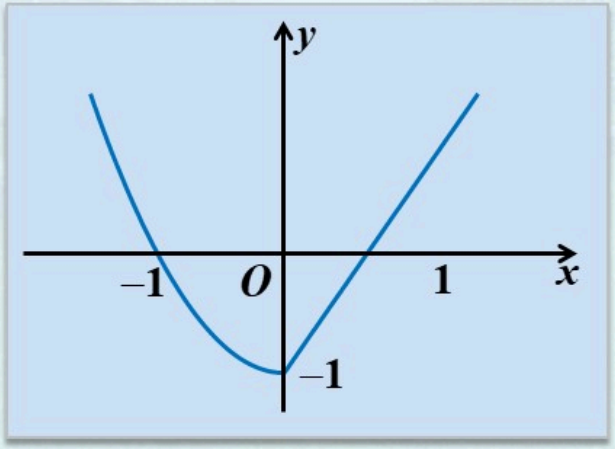
例如：$y=\pm\sqrt{2-x^2}$.

注意：在微积分课程中主要研究单值函数。

定义：点集$C=\{(x,y)\,|\,y=f(x),x\in D\}$称为函数$y=f(x)$的图形.

在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同的式子来表示的函数,称为**分段函数**.

例如，$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0\\ x^2-1, & x\le 0\end{cases}$



例1 用分段函数表示 $f(x)=3-|x-1|$.

解 $f(x)=\begin{cases}3+(x-1), & x<1\\ 3-(x-1), & x\geq 1\end{cases}=\begin{cases}2+x, & x<1\\ 4-x, & x\geq 1\end{cases}$

其它常见分段函数:

$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$ 狄利克雷(Dirichlet)函数: $y=\begin{cases}0, x\in\bar{Q}\\ 1, x\in Q\end{cases}$

取整函数: $y=[x]$(不超过x的最大整数)

$y=\min\{f(x),g(x)\}$ $y=\max\{f(x),g(x)\}$

对应法则是用一个方程$F(x,y)=0$表示的函数称为隐函数.

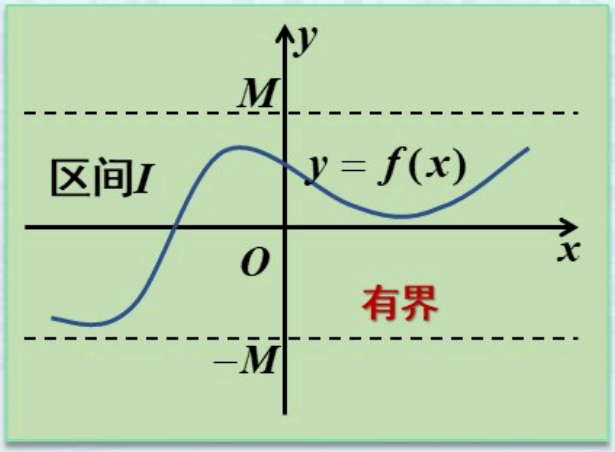
例如: $x^2+y^2=4$, $xy=1$, $y-x-e^x\sin y=0$等.

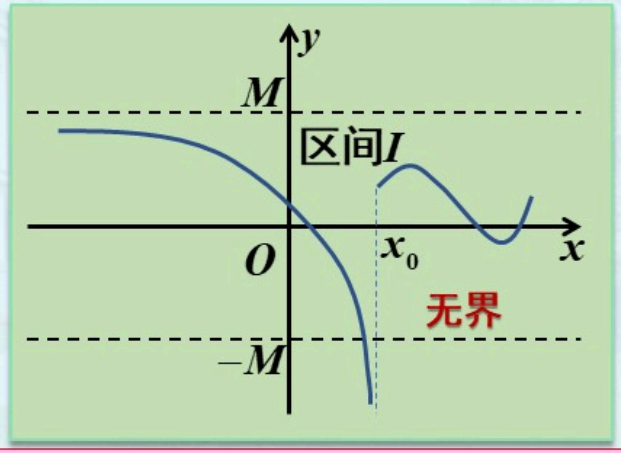
显函数$y=f(x)$

五、函数的几种简单性质

1、函数的有界性

若$\exists M>0,\ \forall x\in I\subseteq D_f$，有$|f(x)|\le M$成立，则称函数$f(x)$在区间$I$上有界. 否则称无界.





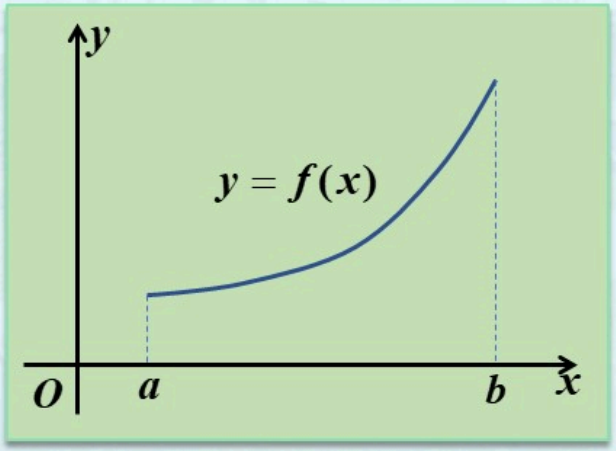
问：无界的定义应该怎么叙述？

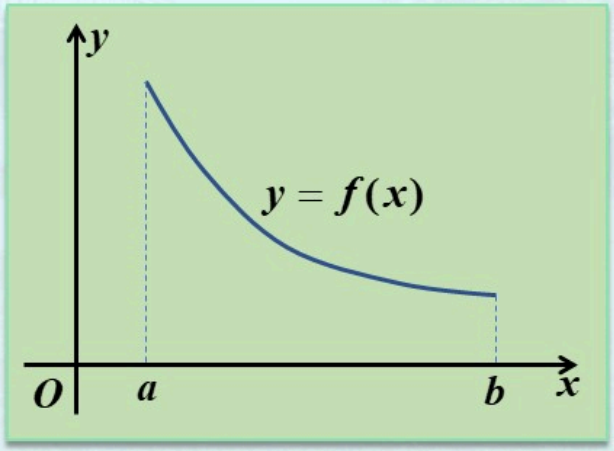
若$\forall M>0,\ \exists x_0\in I\subseteq D_f$，有$|f(x_0)|>M$成立，则称函数$f(x)$在区间$I$上无界.

2、函数的单调性

若$\forall x_1、x_2 \in I \subseteq D_f$，当$x_1 < x_2$时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，
则称函数$f(x)$在区间I上是**单调增加**的；

若$\forall x_1、x_2 \in I \subseteq D_f$，当$x_1 < x_2$时，恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，
则称函数$f(x)$在区间I上是**单调减少**的.

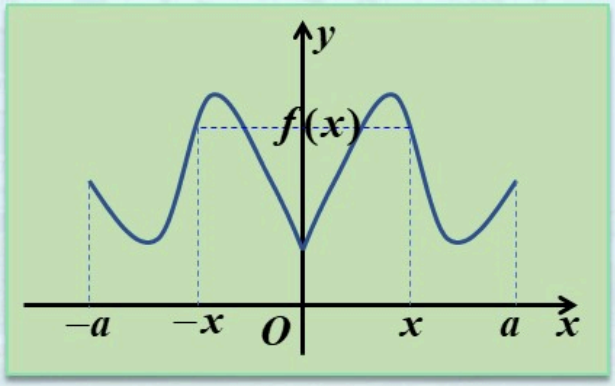


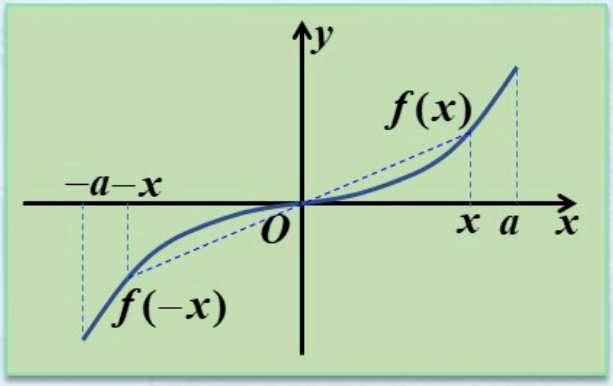


3、函数的奇偶性

设D_f关于原点对称，若$\forall x \in D_f$，有$f(-x)=f(x)$则称$f(x)$为**偶函数**.

设D_f关于原点对称，若$\forall x \in D_f$，有$f(-x)=-f(x)$则称$f(x)$为**奇函数**.





问题1：奇偶函数的四则运算有什么规律？

问题2：为什么说任意定义域对称的函数能表达成一个奇函数和一个偶函数之和？

4、函数的周期性:

设 $y=f(x)$,若$\exists a>0$,使得 $f(x)=f(x+a)$恒成立,则称 $y=f(x)$ 为周期函数.满足这个等式的最小正数a,称为函数的**最小正周期**(或**基本周期**).

基本性质:

(1) 若$f(x)$的周期为T,则$f(ax+b)$的周期为$\dfrac{T}{|a|}$;

(2) 若$f(x)$、$g(x)$的周期为T,则T是$f(x)\pm g(x)$的周期;

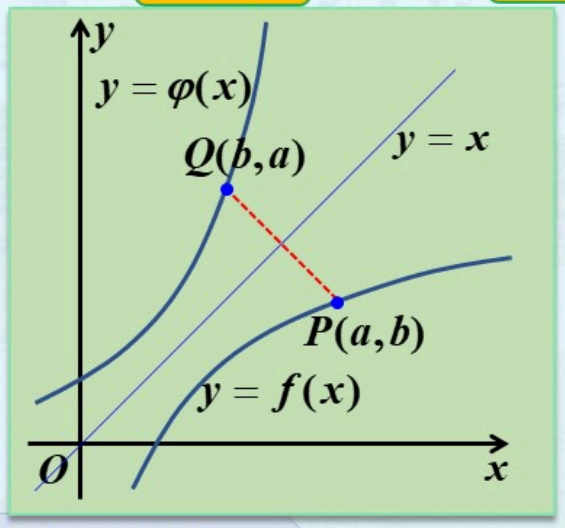
(3) 若$f(x)$、$g(x)$的周期分别为T_1、T_2,则T_1和T_2的最小公倍数是$f(x)\pm g(x)$的周期.

六、反函数与复合函数

1、反函数

设 $y=f(x)$,若$\forall\, y\in Z_f$有一个确定的且满足$y=f(x)$的$x\in D_f$与之对应,其对应规则记作f^{-1},这个定义在Z_f上的函数$x=f^{-1}(y)$称为$y=f(x)$的反函数,或称它们互为反函数.$y=f(x)$也称为直接函数.

直接函数$y=f(x)$与反函数$y=f^{-1}(x)=\varphi(x)$的图形关于直线$y=x$对称.



问题1：$y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$的图形关系是什么？

问题2：是不是只有在整个定义域单调的函数才有反函数？

2、复合函数

设 $y=f(u),\ u=\varphi(x),$ 称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u),\ u=\varphi(x)$ 复合而成的函数. u 称为中间变量, x 为自变量.

例如:

$y=\sin\sqrt{x}$ 是由 $y=\sin u, u=\sqrt{x}$ 复合而成的函数;

$y=\sin(\ln x)$ 是由 $y=\sin u, u=\ln x$ 复合而成的函数;

$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$ $y=\sqrt{u},\ u=\cot v,\ v=\frac{x}{2};$

$y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$ $y=e^u,\ u=v^2,\ v=\sin w,\ w=\frac{1}{x}.$

要点: 由外而内,逐层剥取,每一层是一个基本初等函数.

七、初等函数

1、基本初等函数

$y=C,\ y=x^{\alpha},\ y=a^{x},\ y=\log_a x\ (a\neq 1, a>0)$, 三角函数和反三角函数.

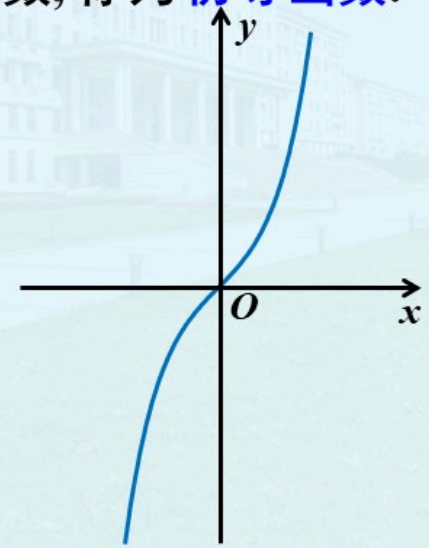
2、初等函数

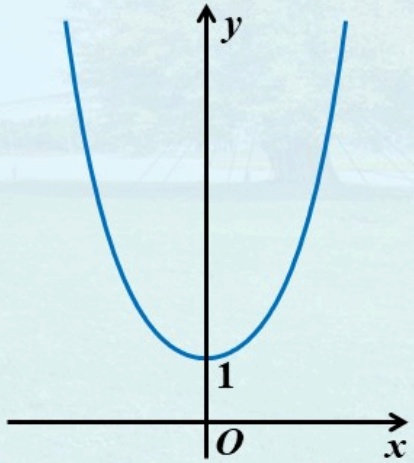
由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成, 并可用一个式子表示的函数, 称为初等函数.

3、双曲函数

双曲正弦: $\mathrm{sh}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

双曲余弦: $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$





为什么称为双曲函数?

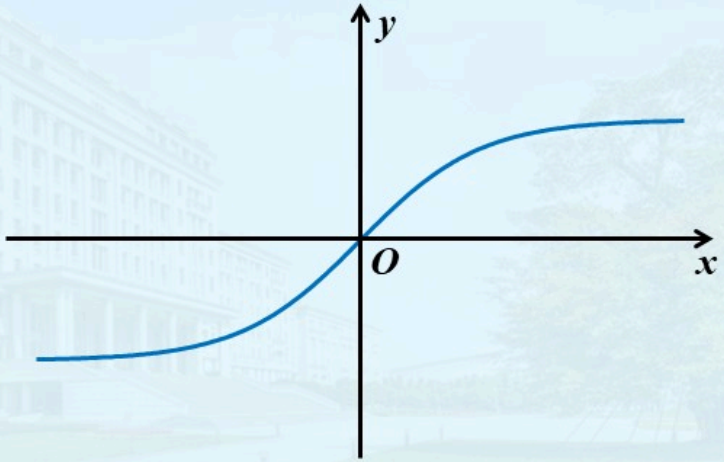
双曲线方程: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$,

令 $y=b\mathrm{sh}t \Rightarrow x^2=a^2\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)$

$=a^2(1+\mathrm{sh}^2t)=a^2\mathrm{ch}^2t \Rightarrow x=\pm a\mathrm{ch}t$

$\Rightarrow$ 左支 $\begin{cases}x=-a\mathrm{ch}t\\ y=b\mathrm{sh}t\end{cases}$, 右支 $\begin{cases}x=a\mathrm{ch}t\\ y=b\mathrm{sh}t\end{cases}$.

双曲正切: $\mathrm{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$



双曲函数常用公式

$\mathrm{sh}(x\pm y)=\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y\pm\mathrm{ch}x\mathrm{sh}y$ $\quad$ $\mathrm{ch}(x\pm y)=\mathrm{ch}x\mathrm{ch}y\pm\mathrm{sh}x\mathrm{sh}y$

$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$ $\quad$ $\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\mathrm{ch}x$ $\quad$ $\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x$

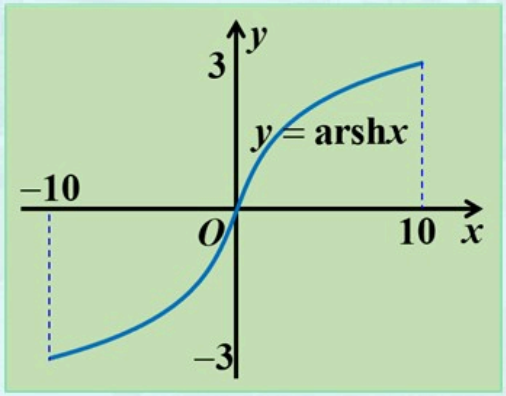
$$\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \mathrm{th}x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

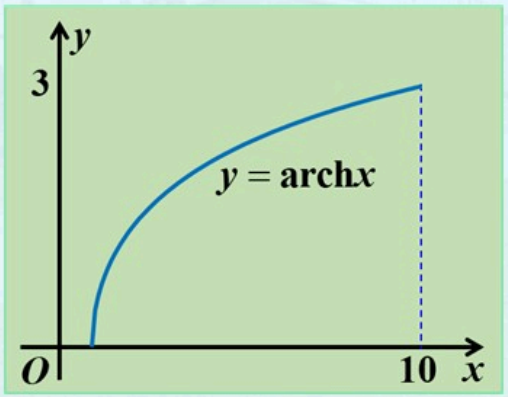
4. 反双曲函数

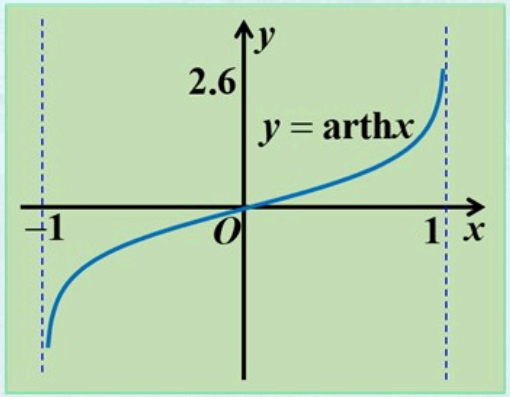
反双曲正弦 $y=\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ $D_f:(-\infty,+\infty)$

反双曲余弦 $y=\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ $D_f:[1,+\infty)$

反双曲正切 $y=\mathrm{arth}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $D_f:(-1,1)$

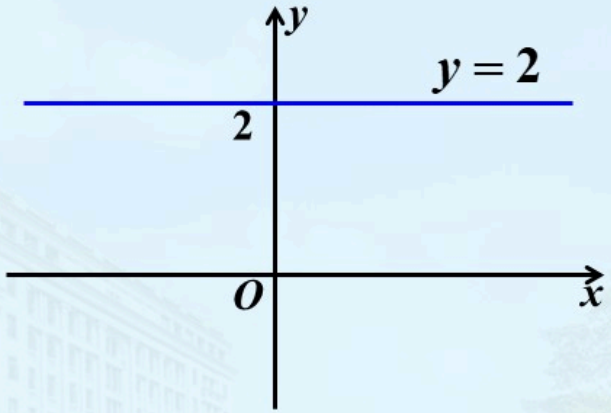






附录1：基本初等函数图形

1. 常数函数 $y = C$



2. 幂函数 $y = x^{\mu}$

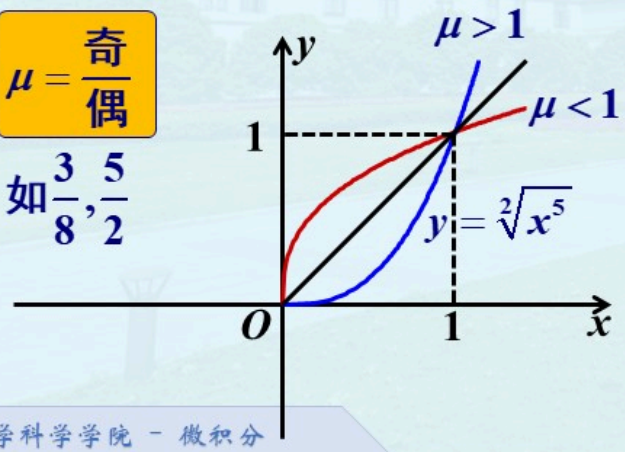
(1) $\mu > 0$

$y = \sqrt[a]{x^b}$

设 $\mu = \frac{b}{a}$ $(a, b$互质$)$，这时需要根据 $\mu > 1, \mu < 1$ 和 a, b 奇偶情形分类.

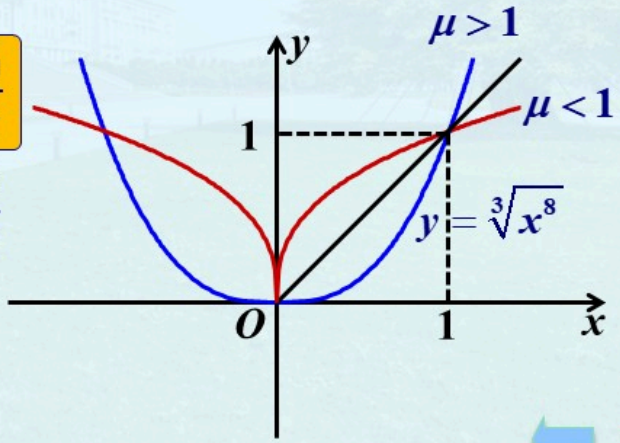
$\mu = \frac{\text{奇}}{\text{偶}}$

如 $\frac{3}{8}, \frac{5}{2}$

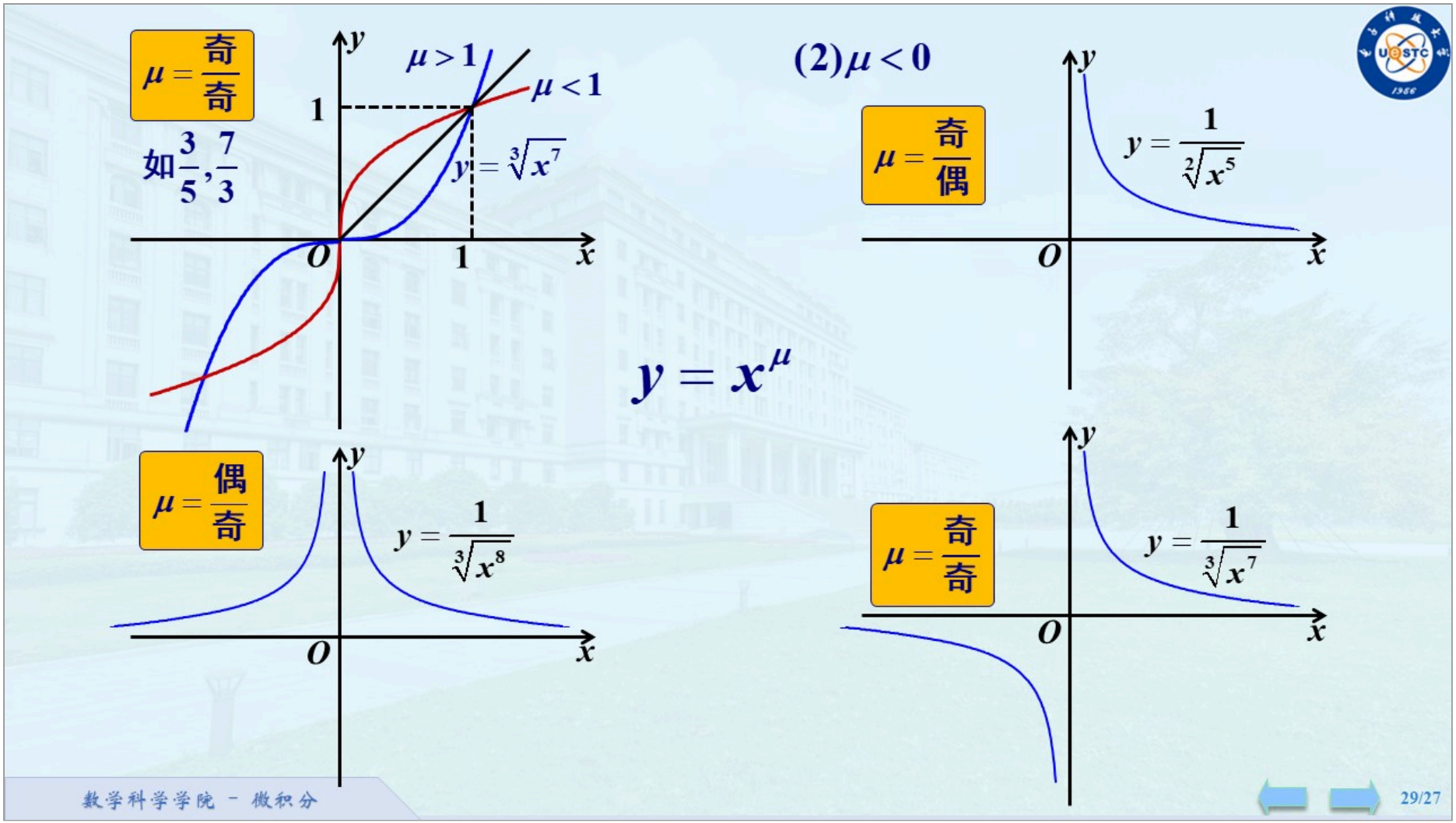


$\mu = \frac{\text{偶}}{\text{奇}}$

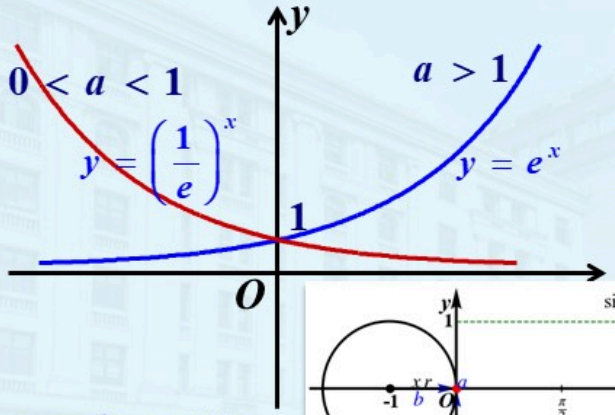
如 $\frac{2}{5}, \frac{8}{3}$



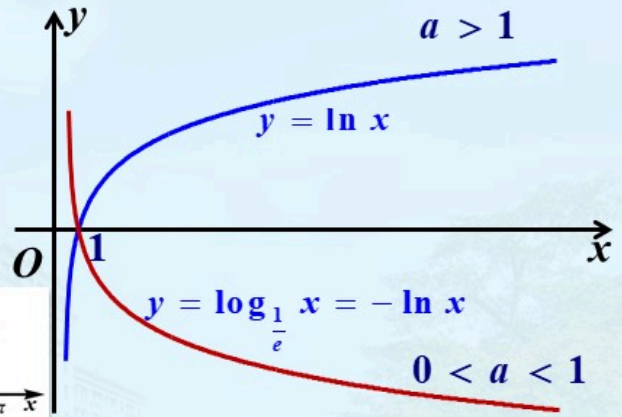
雨课堂 Rain Classroom


$\mu=\frac{\text{奇}}{\text{奇}}$
如$\frac{3}{5},\frac{7}{3}$
y
$\mu>1$
$\mu<1$
1
$y=\sqrt[3]{x^7}$
O
1
x
$(2)\mu<0$
$\mu=\frac{\text{奇}}{\text{偶}}$
$y=\frac{1}{\sqrt[2]{x^5}}$
$y=x^{\mu}$
$\mu=\frac{\text{偶}}{\text{奇}}$
$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}}$
$\mu=\frac{\text{奇}}{\text{奇}}$
$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}$
数学科学学院 - 微积分
29/27

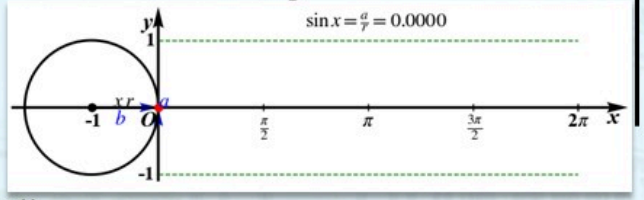
3. 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

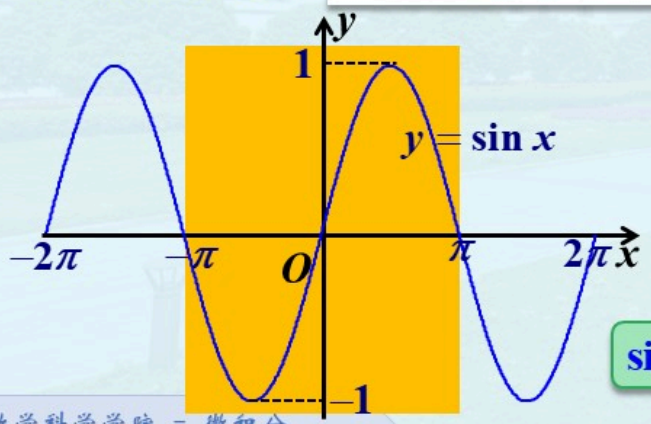


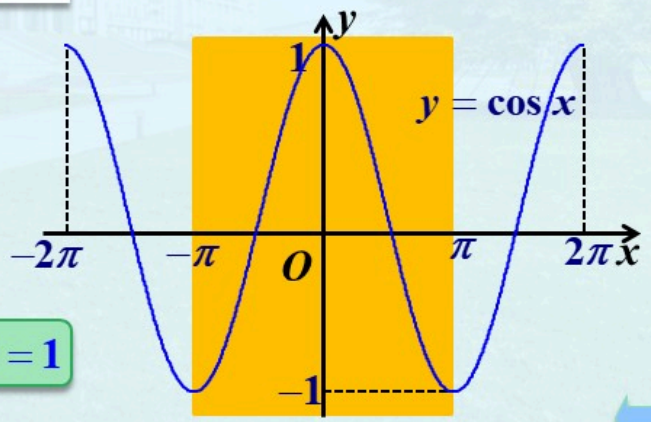
4. 对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$



5. 三角函数



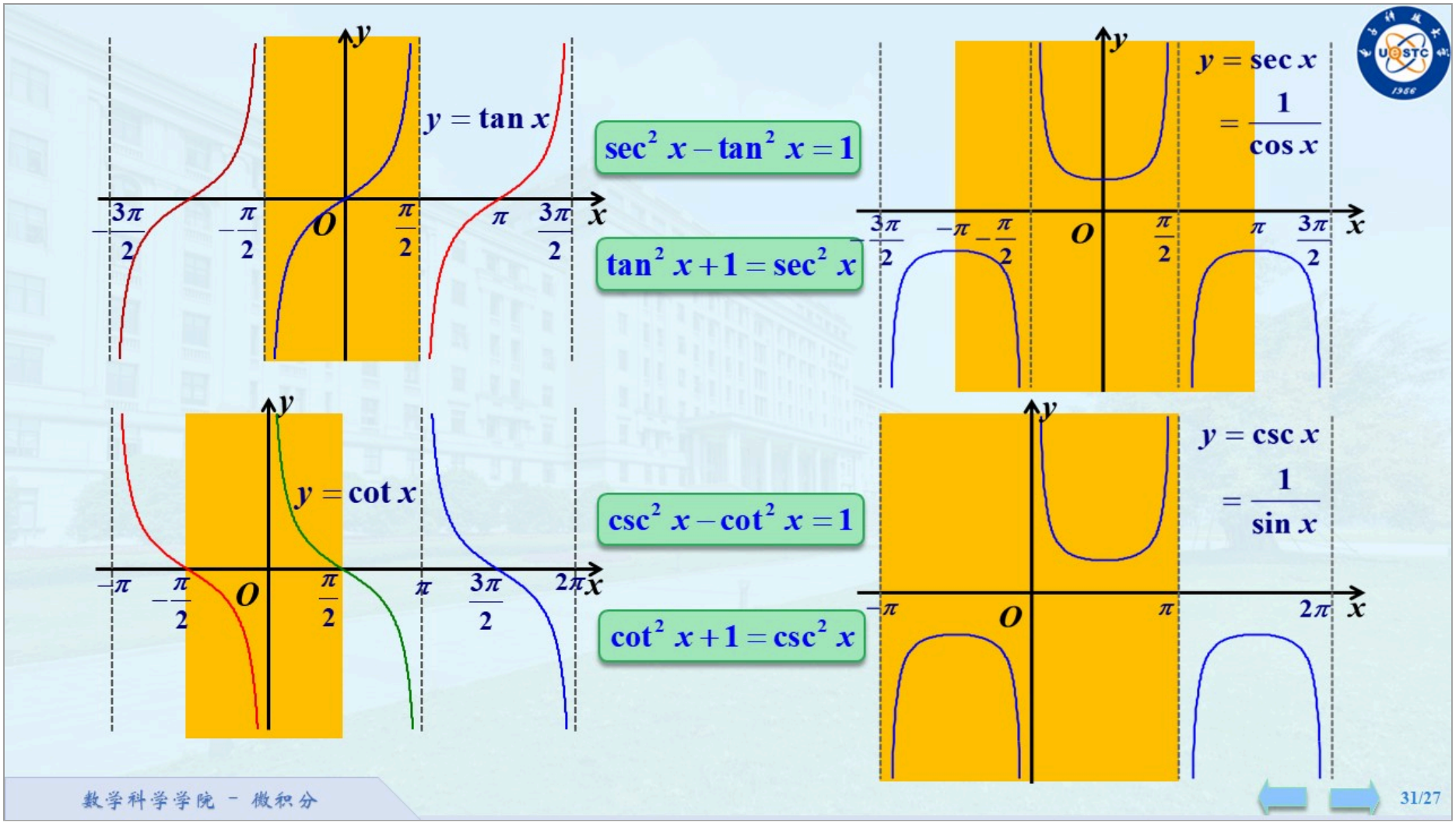




$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

数学科学学院 - 微积分

30/27


y
x
O
$y=\tan x$
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
$\sec^2 x-\tan^2 x=1$
$\tan^2 x+1=\sec^2 x$
$y=\sec x$
$=\frac{1}{\cos x}$
$y=\cot x$
$-\pi$
2π
$\csc^2 x-\cot^2 x=1$
$\cot^2 x+1=\csc^2 x$
$y=\csc x$
$=\frac{1}{\sin x}$
数学科学学院 - 微积分
31/27