例4 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2.$

证: $\forall\varepsilon>0,\ \left|\dfrac{x+1}{x-2}-(-2)\right|=3\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|<\varepsilon$

注意到邻域半径δ的形式应为$|x-1|<\delta$,因此上式中$|x-1|$应保留,其余部分应适当放大.

限制 $|x-1|<\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}\Rightarrow-\dfrac{3}{2}<x-2<-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{2}<|x-2|<\dfrac{3}{2}$

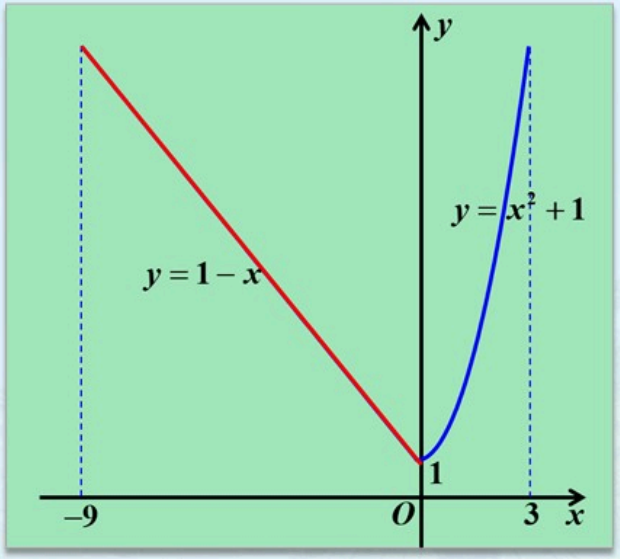
即有 $3\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|<6|x-1|<\varepsilon,$ 取$\delta=\min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\varepsilon}{6}\right\}$

则当$|x-1|<\delta$时,有$\left|\dfrac{x+1}{x-2}-(-2)\right|<\varepsilon,$ 故 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2.$

3. 左右极限:

例如: 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$

证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$



分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况分别讨论:

x从左侧无限趋近 x_0, 记作$x\to x_0-0$或$\left(x\to x_0^-\right)$;

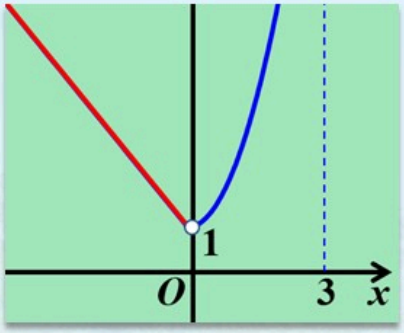
x从右侧无限趋近 x_0, 记作$x\to x_0+0$或$\left(x\to x_0^+\right)$;

左极限

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

记作 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0 - 0) = A$

在 $x \to x_0^-$ 过程中, $x < x_0$.

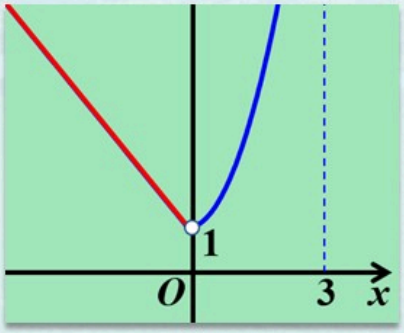


右极限

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0 + 0) = A$.

在 $x \to x_0^+$ 过程中, $x > x_0$.



定理: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

例5　验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

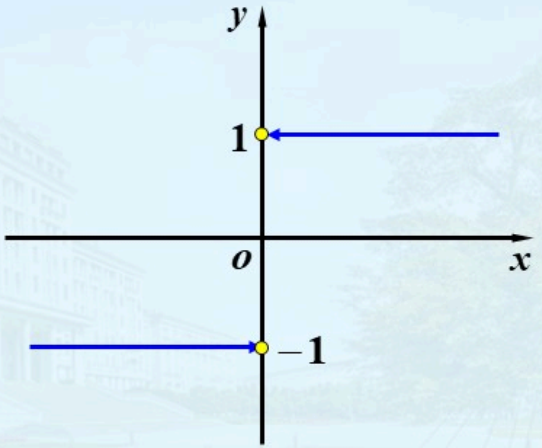
证　$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$

$\because \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}$　　$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.



例6 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x>0\\ 10, & x=0\\ 5+x^2, & x<0\end{cases}$ 在$x=0$处的左、右极限是否存在？当$x\to 0$时，$f(x)$的极限是否存在？

解 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(5+x^2)=5,\quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0,$

$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\quad \therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

例7 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x>1,\\ x-1, & x<1,\end{cases}$ 求在$x=1$处的左右极限和极限.

解 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0\quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-1)=0$

$\because \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0\quad \therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

三、函数极限的性质　证明均以$x \to x_0$的极限过程为例

1.有界性

若在某个极限过程中,函数$f(x)$有极限,则在该过程中存在某个时刻,在此时刻后函数$f(x)$有界. 即若函数有极限,则局部有界.

证明　若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, 则对$\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时, 有$|f(x) - A| < \varepsilon$,

即$A - 1 < f(x) < A + 1$, 所以当$0 < |x - x_0| < \delta$时, $f(x)$有界.

2.唯一性

若在某个极限过程中,函数$f(x)$有极限,则该极限一定唯一.

证明　设$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$, 且$A < B$. 取$\varepsilon = \dfrac{B - A}{2}$,

$\exists \delta_1 > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta_1$时, 有$|f(x) - A| < \varepsilon$, 即$\dfrac{3A - B}{2} < f(x) < \dfrac{A + B}{2}$;

$\exists \delta_2 > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta_2$时, 有$|f(x) - B| < \varepsilon$, 即$\dfrac{A + B}{2} < f(x) < \dfrac{3B - A}{2}$. 取$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,

则当$0 < |x - x_0| < \delta$时, 既有$f(x) < \dfrac{A + B}{2}$, 又有$f(x) > \dfrac{A + B}{2}$, 这显然矛盾.

3.保号性

某个极限过程中，$\lim f(x)=A>0(A<0)$，则从某个时刻起，一定有$f(x)>0\big(f(x)<0\big)$.

证明 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$，取$\varepsilon=\dfrac{A}{2}$，$\exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon=\dfrac{A}{2}$，

即$\dfrac{A}{2}<f(x)<\dfrac{3A}{2}$，所以当$0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)>0$.

推论1 某个极限过程中，$\lim f(x)=A$，且从某个时刻起$f(x)>0\big(f(x)<0\big)$，则有 $A\geq 0(A\leq 0)$.

证明 用反证法.

假设极限$A<0$，则由保号性结论，存在某一时刻，从该时刻起，$f(x)<0$，这与已知矛盾. 所以假设不成立.

推论2 某个极限过程中,$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,若$A>B(A<B)$,则从某个时刻起,一定有$f(x)>g(x)\big(f(x)<g(x)\big)$.

证明 作辅助函数$F(x)=f(x)-g(x)$, 则

$$\lim F(x)=\lim[f(x)-g(x)]=\lim f(x)-\lim g(x)=A-B>0.$$

由极限的保号性结论,存在某个时刻,从该时刻起,有$F(x)>0$, 即$f(x)>g(x)$.

推论3 某个极限过程中,$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,且从某个时刻起$f(x)\geq g(x)$ $\big(f(x)\leq g(x)\big)$,则有$A\geq B(A\leq B)$.

证明 用反证法.

假设极限$A<B$, 则推论2,存在某一时刻, 从该时刻起, $f(x)<g(x)$,
这与已知矛盾. 所以假设不成立.

4.函数极限与数列极限的关系

定理　设$f(x)$在x_0的δ去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$有定义,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$的充要条件是:

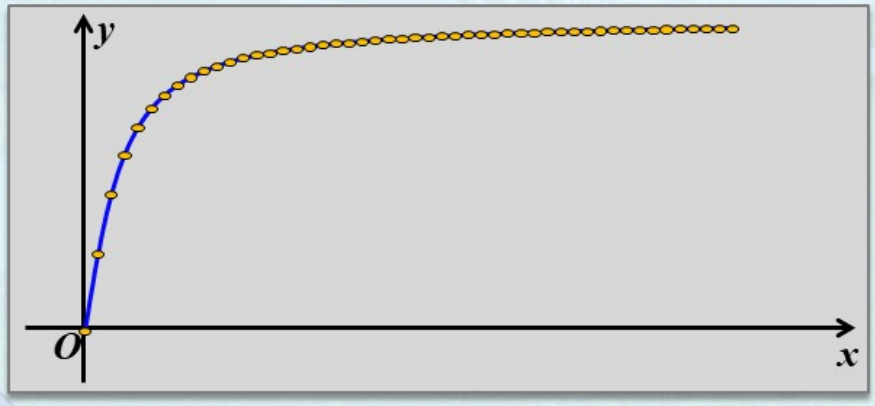
对任何以x_0为极限,且含于此空心邻域的数列$\{x_n\}$,都有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

$$\left((1)\,x_n\in\mathring{U}(x_0,\delta);\qquad (2)\lim_{n\to\infty}x_n=x_0\right).$$

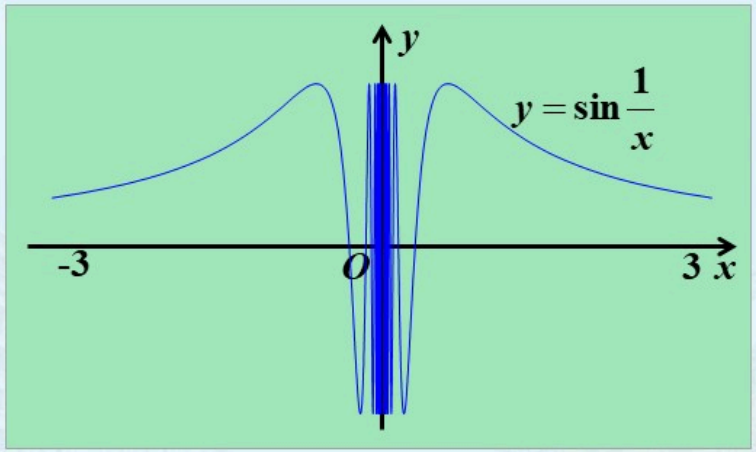
海涅(Heine)定理

例如, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,则取$x_n=\dfrac{1}{n}$,有$\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{1}{n}=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$, 则取$x_n=\ln n$, 有$\lim\limits_{n\to\infty}\arctan\ln n=\dfrac{\pi}{2}$.



例8 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.



证 取 $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n\pi}\right\}$, $x_n\neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

取 $\{x'_n\}=\left\{\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right\}$, $x'_n\neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x'_n=0.$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0,\quad \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x'_n}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}1=1,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

作 业

习题册

- 第4页 ☛ 3、4