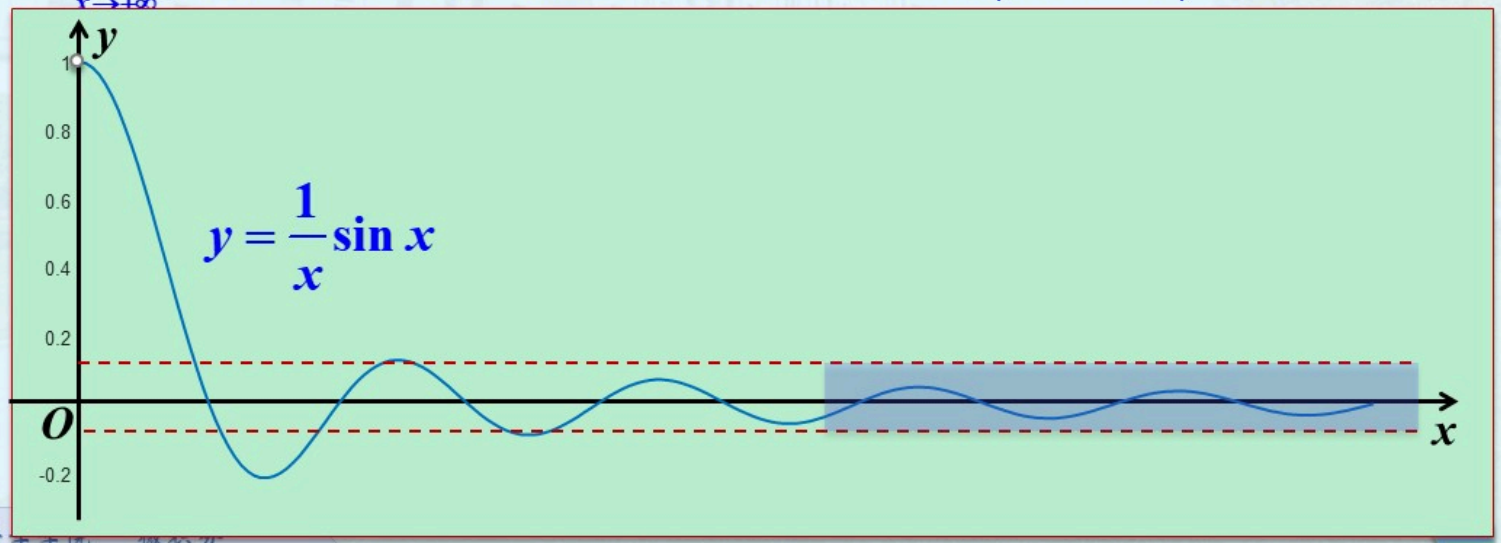

电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China
第二节　极限的概念(续)
自变量趋于无穷大时函数的极限
自变量趋向有限值时函数的极限
函数极限的性质
数学科学学院 汪小平

一、当自变量趋于无穷大时函数的极限

1. $x \to +\infty$时的情形

定义1 设$f(x)$是定义在$[a,+\infty)$上的函数，A是常数. 若对于任意给定的正数ε，总存在正数X，使得对任何$x > X$，都有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称A为当x趋于正无穷大时$f(x)$的极限，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

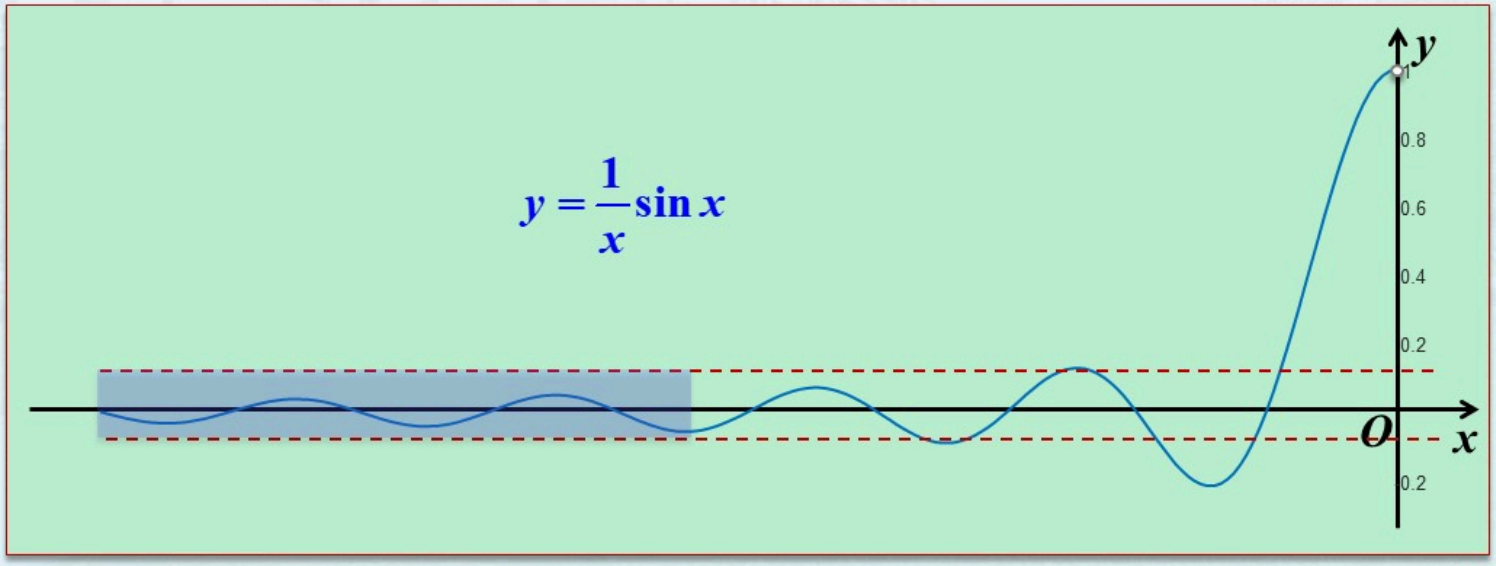
ε-X: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists X>0$，当$x>X$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.



2. $x \to -\infty$时的情形

定义2 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当$x < -X$时, 有$|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称$A$为$f(x)$当$x$趋于负无穷大时的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

ε-X: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当$x < -X$时, 有$|f(x) - A| < \varepsilon$.



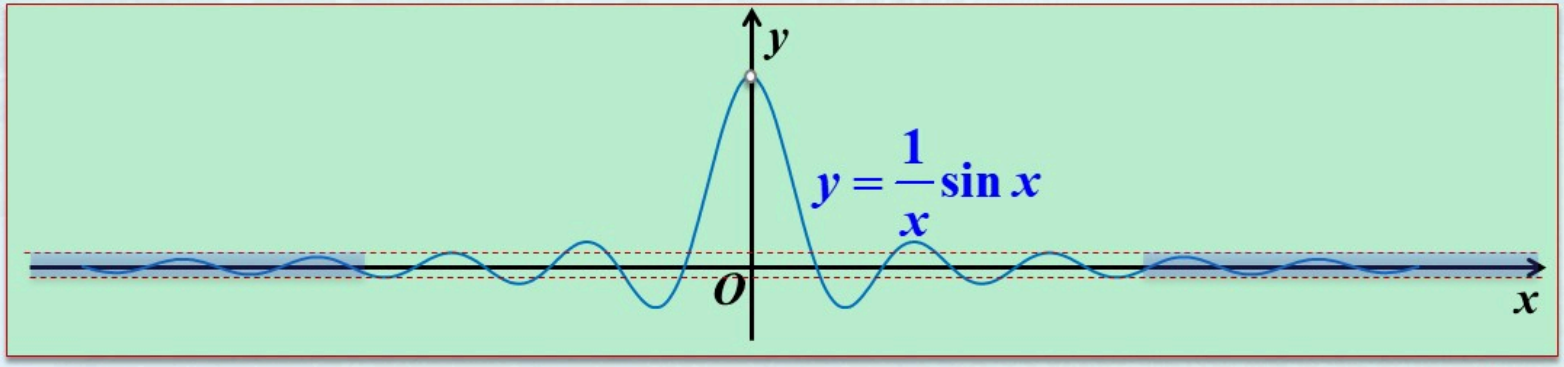
3. $x \to \infty$时的情形

定义3 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在正数X,使得对于适合不等式$|x| > X$的一切x,所对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x) - A| < \varepsilon$,则称常数A为函数$f(x)$当$x \to \infty$时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \to A\,(\text{当}x \to \infty\text{时})$$

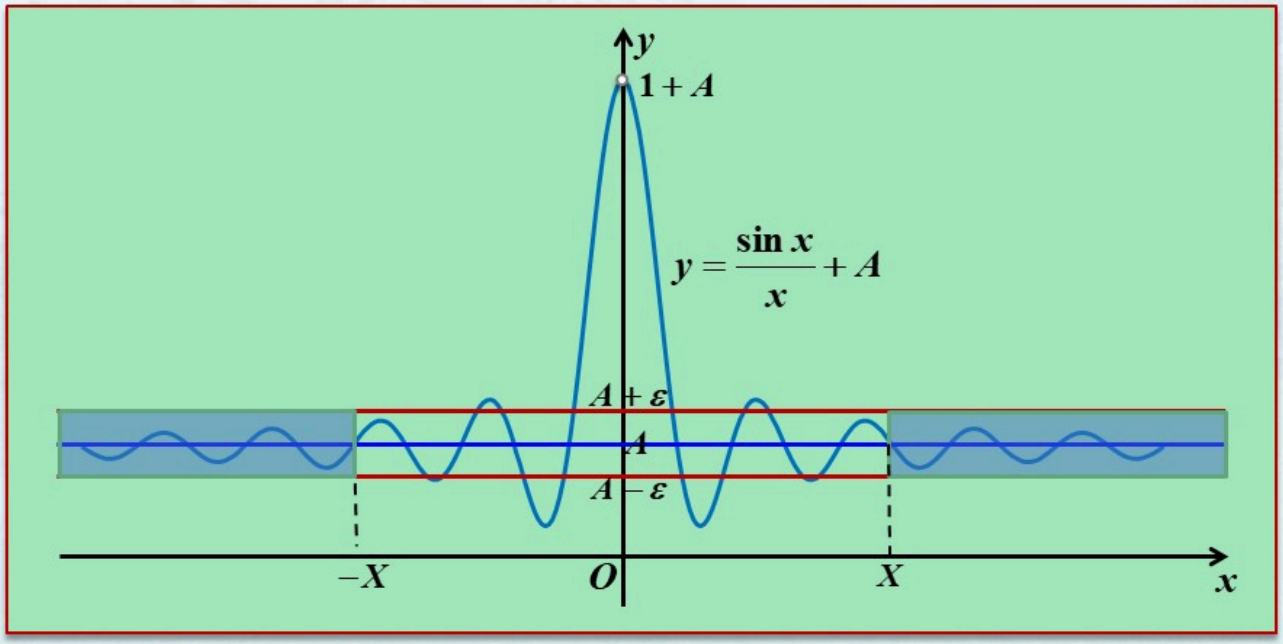
$$\varepsilon\text{-}X\text{:}\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{当}|x| > X\text{时,有}|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\text{定理:}\lim_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = A\text{且}\lim_{x\to-\infty} f(x) = A.$$



几何解释:

对$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当$x < -X$或$x > X$时, 函数$y = f(x)$图形完全落在以直线$y = A$为中心线 , 宽为$2\varepsilon$的带形区域内.



$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists X>0, \text{当} |x|>X \text{时, 有} |f(x)-A|<\varepsilon.$$

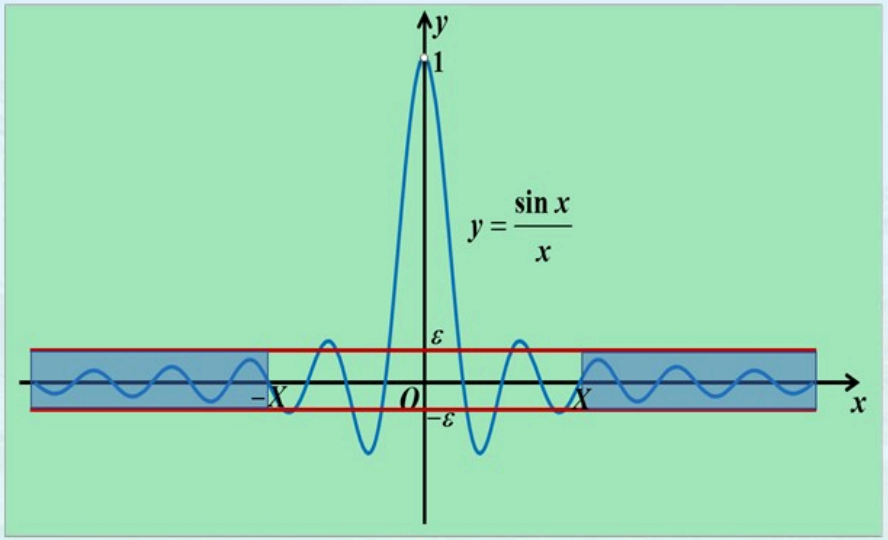
例1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

证 $\forall \varepsilon>0$, 要使 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$

$<\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$, 只需 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$, 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$,

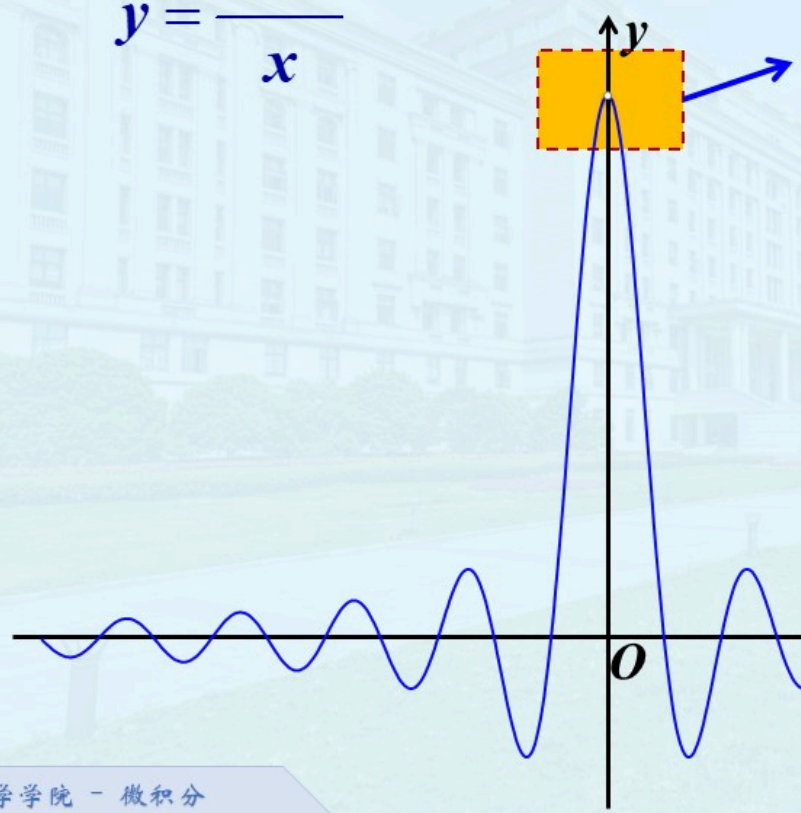
则当 $|x|>X$ 时恒有 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$,

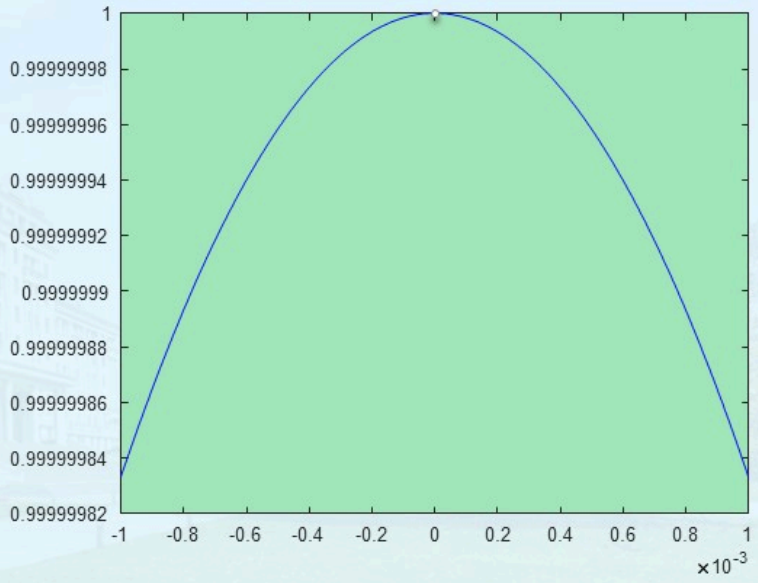
故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$



二、自变量趋向有限值时函数的极限

$$y=\frac{\sin x}{x}$$

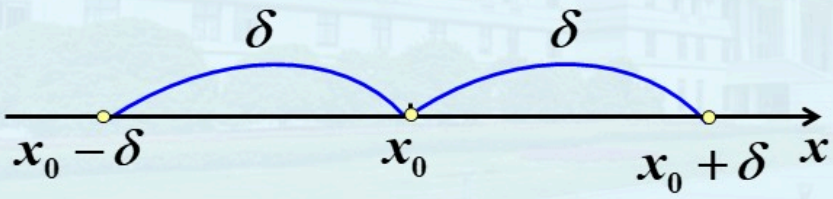


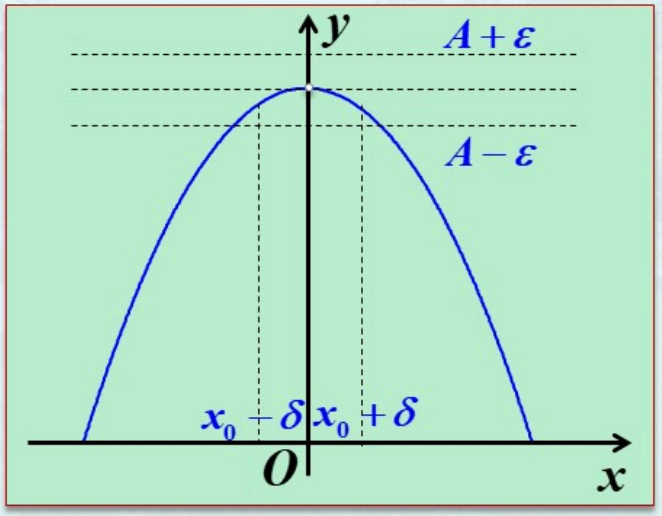


如何描述函数$f(x)$在$x \to x_0$的过程中,对应函数值$f(x)$无限趋近于确定值A.

$|f(x)-A|<\varepsilon$ 表示$|f(x)-A|$任意小；

$0<|x-x_0|<\delta$ 表示$x \to x_0$过程中的某一时刻之后.





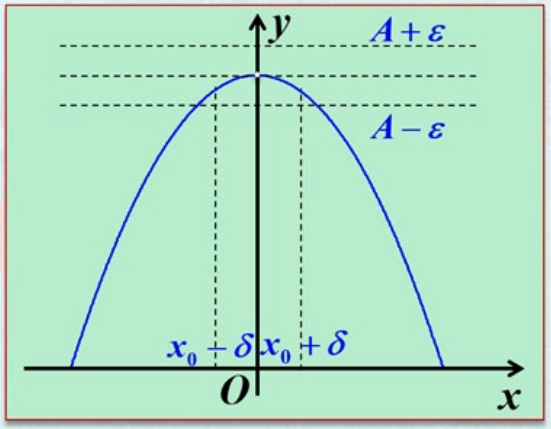
δ 体现 x 接近 x_0程度.

1. 定义("$\varepsilon-\delta$"定义):

定义4 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在正数δ,使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切x,对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A\,(\text{当}x\to x_0\text{时})$$

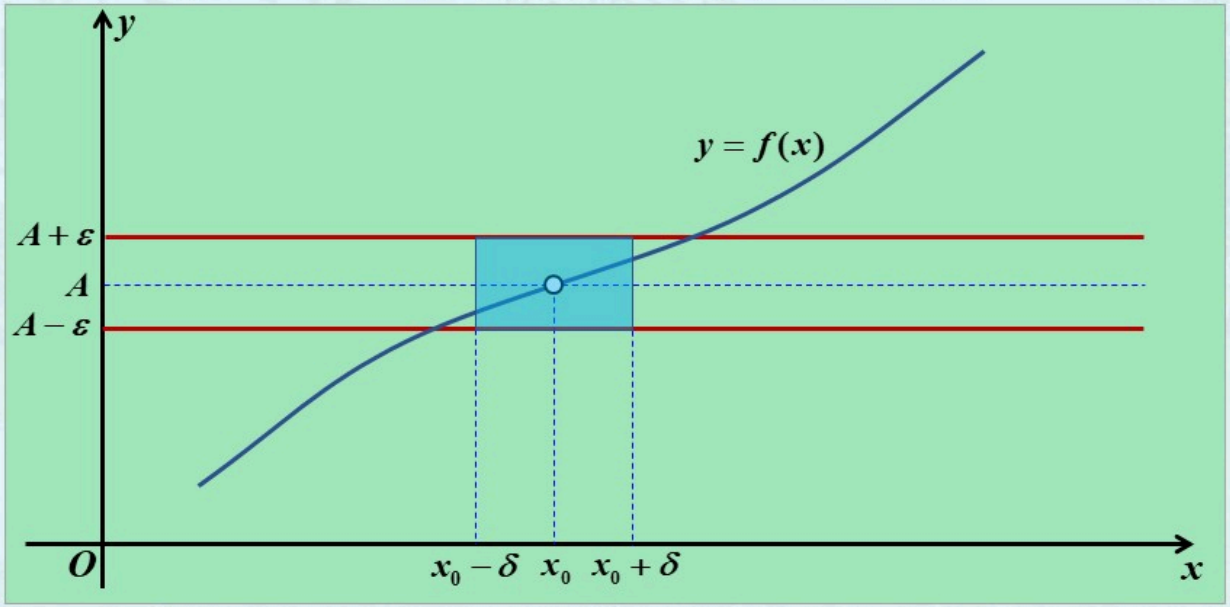
即$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$.



$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当} 0 < |x - x_0| < \delta \text{时, 恒有} |f(x) - A| < \varepsilon.$$

2. 几何解释:

任意给定$\varepsilon > 0$,一定存在$\delta > 0$,当x在x_0的去心δ邻域时,函数$y = f(x)$图形完全落在以直线$y = A$为中心线,宽为2ε的带形区域内.



$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 当$0 < |x - x_0| < \delta$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon.$

例2 证明 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$ 函数在点 $x = 1$处没有定义.

证 $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|f(x) - A| = \left| \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x - 1| < \varepsilon$, 只需 $|x - 1| < \varepsilon$, 取$\delta = \varepsilon$,

当$0 < |x - 1| < \delta$时, 就有 $\left| \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$, $\therefore \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$

例3 证明: 当$x_0 > 0$时, $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

证 $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|f(x) - A| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \dfrac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \le \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon,$

只要$|x - x_0| < \sqrt{x_0}\varepsilon$且不取负值. 取$\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0}\varepsilon\}$,

当$0 < |x - x_0| < \delta$时, 就有$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$, $\therefore \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

例4 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2.$

证: $\forall \varepsilon>0,\ \left|\dfrac{x+1}{x-2}-(-2)\right|=3\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|<\varepsilon$

注意到邻域半径δ的形式应为$|x-1|<\delta$,因此上式中$|x-1|$应保留,其余部分应适当放大.

限制 $|x-1|<\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}\Rightarrow -\dfrac{3}{2}<x-2<-\dfrac{1}{2}\Rightarrow \dfrac{1}{2}<|x-2|<\dfrac{3}{2}$

即有 $3\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|<6|x-1|<\varepsilon,$ 取 $\delta=\min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\varepsilon}{6}\right\}$

则当 $|x-1|<\delta$ 时,有 $\left|\dfrac{x+1}{x-2}-(-2)\right|<\varepsilon,$ 故 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2.$