四、数列极限的性质

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 当 $n > N$ 时,
恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 即 $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

有界性

定理1 收敛的数列必定有界.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 由定义, 取 $\varepsilon = 1$, 则 $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时,

恒有 $|x_n - a| < 1$, 即有 $a - 1 < x_n < a + 1$.

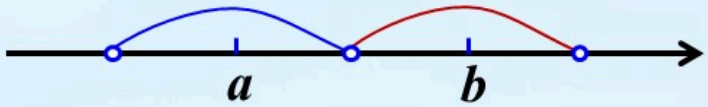
记 $M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_N|, |a-1|, |a+1|\}$,

则对一切自然数 n, 皆有 $|x_n| \le M$,

推论 无界数列必定发散.

唯一性

定理2 每个收敛的数列只有一个极限.



证一 反证法.

假设$\{x_n\}$有两个不同极限, 即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 又$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 不妨设$a < b$.

取$\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$, 则$\exists N_1 > 0$, 当$n > N_1$时, 恒有$|x_n - a| < \varepsilon$, 即$\dfrac{3a-b}{2} < x_n < \dfrac{a+b}{2}$;

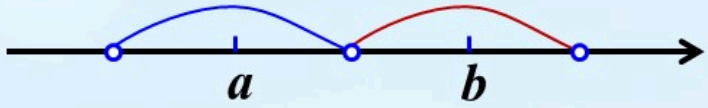
同理, $\exists N_2 > 0$, 当$n > N_2$时, 恒有$|x_n - b| < \varepsilon$, 即$\dfrac{a+b}{2} < x_n < \dfrac{3b-a}{2}$.

取$N = \max\{N_1, N_2\}$, 当$n > N$时, 既有$x_n < \dfrac{a+b}{2}$, 又有$x_n > \dfrac{a+b}{2}$.

这显然矛盾, **所以收敛数列极限唯一.**

唯一性

定理2 每个收敛的数列只有一个极限.



证二 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 又 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 由定义,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1, N_2$, 使得当 $n > N_1$ 时, 恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$;

当 $n > N_2$ 时, 恒有 $|x_n - b| < \varepsilon$.

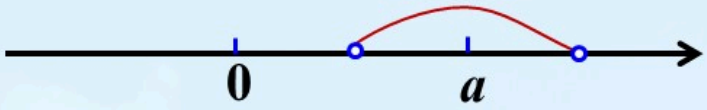
取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时有

$$|a-b| = |(x_n - b) - (x_n - a)| \le |x_n - b| + |x_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

上式仅当 $a = b$ 时才能成立.

故收敛数列极限唯一.

定理3（保号性）



设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0 (a < 0)$，则 $\exists N > 0$，当 $n > N$ 时有 $x_n > 0 (x_n < 0)$.

证 $\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$. 则对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon$ 成立.

取 $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$，则 $\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \dfrac{a}{2}$ 成立，

即 $a - \dfrac{a}{2} < x_n < a + \dfrac{a}{2}$，$\therefore x_n > \dfrac{a}{2} > 0$. 当 $a < 0$ 类似可证.

推论1 若 $\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，$x_n \geq 0 (x_n \leq 0)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq 0 (\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq 0)$.

证(用反证法) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < 0$，由定理3，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，有 $x_n < 0$.

这与条件 $x_n \geq 0$ 矛盾.

注： 若 $x_n > 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在 $\not\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$. 例如：$1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \cdots, \dfrac{1}{n}, \cdots$

结论： 若 $x_n > 0$ $(x_n < 0)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq 0 (\leq 0)$

推论2 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim y_n=b$,且$a>b(a<b)$,则$\exists N>0$,当$n>N$时,有$x_n>y_n(x_n<y_n)$.

证明 证$a>b$的情形,$a<b$时证明类似. 令$z_n=x_n-y_n$, 则

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n-\lim_{n\to\infty}y_n=a-b>0.$$

由极限的保号性结论, $\exists N>0$,当$n>N$时,有$x_n>y_n$.

推论3 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\lim y_n=b,\exists N>0$,当$n>N$时,$x_n\geq y_n(x_n\leq y_n)$,则有$a\geq b(a\leq b)$.

证明 证$x_n\geq y_n$的情形,$x_n\leq y_n$时证明类似. 用反证法.

假设极限$a<b$, 则推论2, 存在$N>0$, 当$n>N$时,$x_n<y_n$,

这与已知矛盾. 所以假设不成立.

推论2和推论3可以称为极限的**保序性**.

定理4 设$\{x_n\}$极限存在,则$\{x_n\}$的所有子数列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$ 极限均存在,且 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

例 $\{(-1)^n\}$: $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1\ \cdots$

取奇数项 $x_{2k-1}: -1,-1,-1,-1,\cdots.$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2k-1} = -1.$

取偶数项 $x_{2k}: 1,\ 1,\ 1,\ \cdots.$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2k} = 1$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_{2k-1} \neq \lim\limits_{n\to\infty} x_{2k}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\{(-1)^n\}$不存在

练习:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

极限的运算性质：

定理 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$均存在，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}cx_n=c\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ （c为常数）

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$ $(\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq 0)$

课后问题：

1. 对于等式$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

(1)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$都存在，两个等式一定成立吗？

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$不存在，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)$和$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)$一定不存在吗？

(3)若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$和$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$均不存在，$(x_n\pm y_n)$和$(x_n\cdot y_n)$的极限又怎样？

2. 试证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0.$

作 业

习题册

- 第4页 ☛ 2