
电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China
第二节 极限的概念
数列的定义
数列的简单性态
数列的极限
数列极限的性质
数学科学学院 汪小平

一、数列的定义

定义：按自然数1, 2, 3, …编号依次排列的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \qquad (1)$$

称为**无穷数列**, 简称**数列**. 其中每个数为数列的**项**. x_n称为**通项(一般项)**.

数列(1)记为$\{x_n\}$.

$2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots;$ $\{2^n\}$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots;$ $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$

$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots;$ $\{(-1)^{n-1}\}$

$2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+(-1)^{n-1}}{n}, \cdots;$ $\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$

$\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \cdots, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}, \cdots.$ $a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}$

二、数列的简单性态

单调数列： 对数列$\{x_n\}$,若对$\forall n$,都有$x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$,则称$\{x_n\}$为单调增加(单调减少)数列.若对$\forall n$,都有$x_n \le x_{n+1}(x_n \ge x_{n+1})$,则称$\{x_n\}$为单调不减(或单调不增)数列.

有界性： 对于数列$\{x_n\}$,若 $\exists\ M>0$,使$\forall n$,均有$|x_n| \le M$,则称$\{x_n\}$为有界数列.否则 $\{x_n\}$称为无界数列, 即对 $\forall M>0, \exists n_0$,使得 $|x_{n_0}| > M$.

单选题 1分

有限项数列是否一定有界?

A 有界

B 不一定

有限项数列是否一定有界?

A 有界

B 不一定

解析：对于有限项数列，由于数列项数是有限的，而数列每一项一定是一个确定的数，所以一定可以在这些项中找到绝对值最大的项的值作为数列的界。

注意：**无穷大不是一个数，更不是确定的数，所以不能作为数列某个确定的项。**

有时候关心的是数列有否上界或下界：

有**上界**：若$\exists M,\ \forall n\ \ x_n \le M$,则称数列$\{x_n\}$有上界.

有**下界**：若$\exists\ \ m,\ \forall n\ \ m \le x_n$,则称数列$\{x_n\}$有下界.

结论：既有上界又有下界的数列必有界.

例：$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\frac{1}{n},\ \cdots$　　$2,\ 4,\ \cdots,2n,\ \cdots$

三、数列的极限

问题: 当n无限增大时,数列x_n是否无限接近于某一确定的数值?

如果是, 如何确定?如何描述?

下面进一步考察以下数列当$n \to \infty$时的变化趋势:

(1) $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots \xrightarrow{n\to\infty} 0$

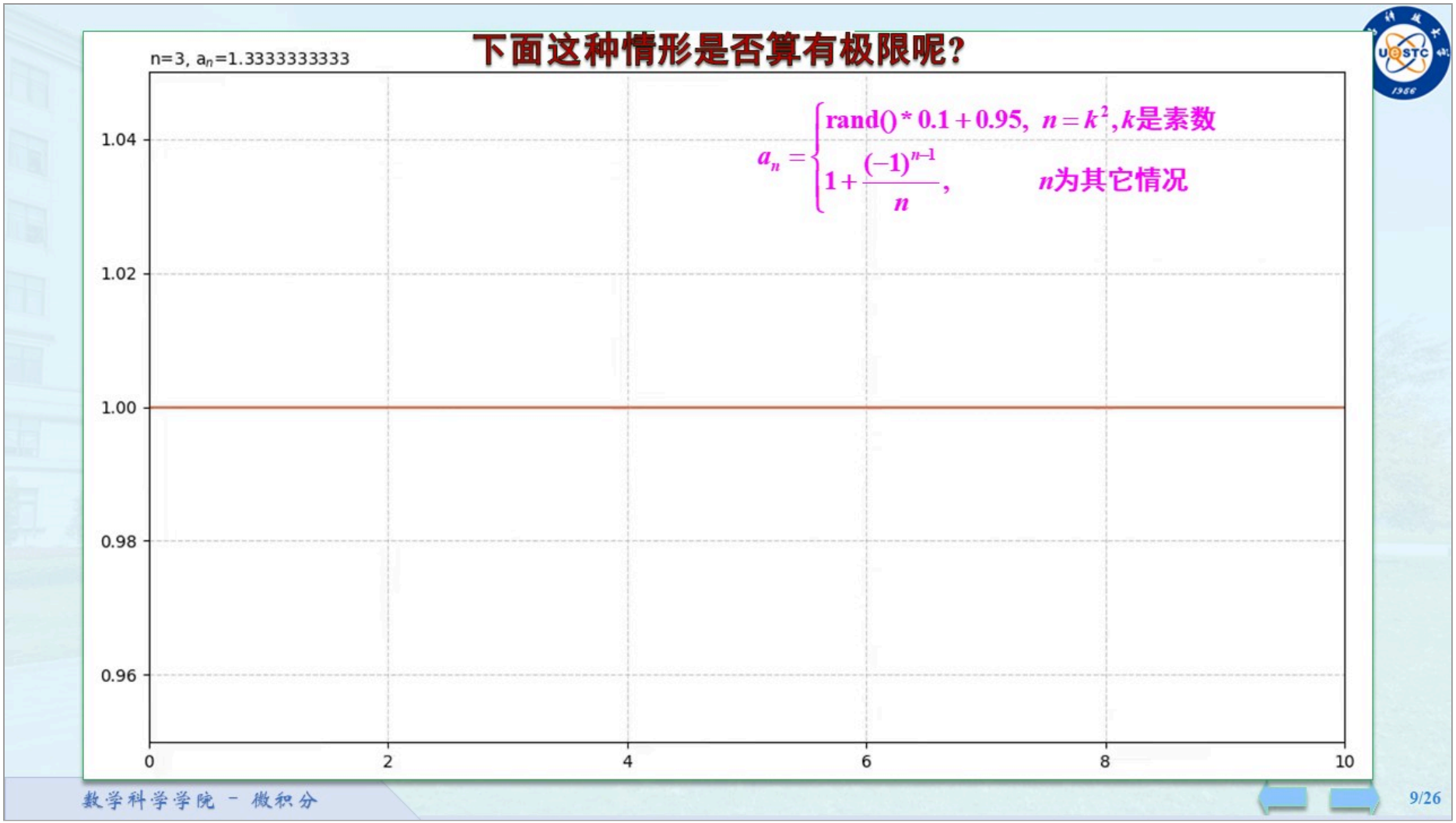
(2) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}: 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots \xrightarrow{n\to\infty} 1$

(3) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}: -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \cdots, \frac{(-1)^n}{n}, \cdots \xrightarrow{n\to\infty} 0$

在0的两侧来回跳跃

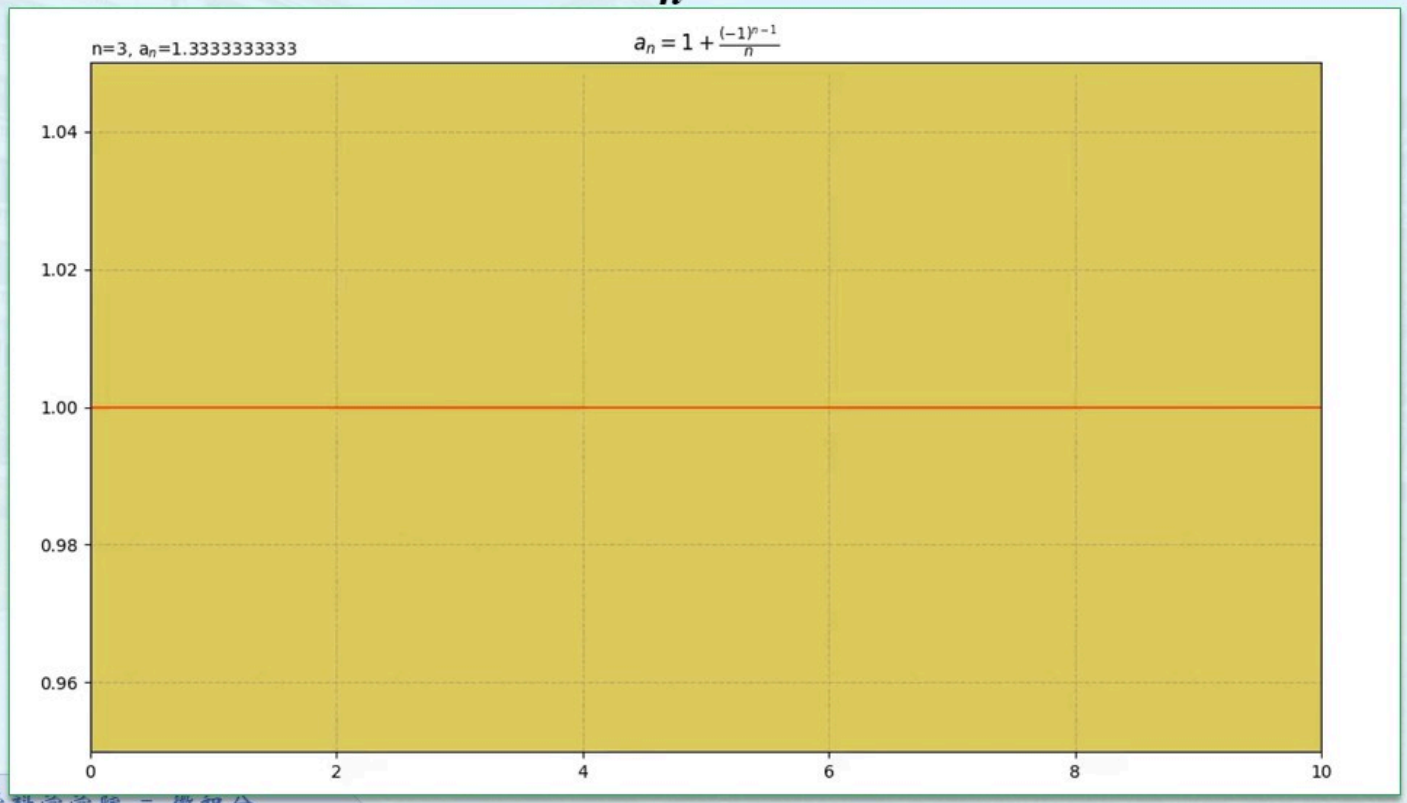
(4) $\{(-1)^n\}: -1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots \xrightarrow{n\to\infty}$ 不确定

(5) $\{2^n\}: 2, 4, 8, 16, \cdots, 2^n, \cdots \xrightarrow{n\to\infty}$ 不确定


下面这种情形是否算有极限呢?
n=3, a_n=1.3333333333
$a_n = \begin{cases} \text{rand}() * 0.1 + 0.95, & n = k^2, k\text{是素数} \\ 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}, & n\text{为其它情况} \end{cases}$
1.04
1.02
1.00
0.98
0.96
0
2
4
6
8
10
数学科学学院 - 微积分
9/26

下面我们分析：

当n无限增大时，数列$x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$怎样无限接近于 1.



$$x_n = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Rightarrow |x_n - 1| = \frac{1}{n}$$

给定 $\frac{1}{100}$，由 $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$，只要 $n > 100$时，有 $|x_n - 1| < \frac{1}{100}$

给定 $\frac{1}{1000}$，只要 $n > 1000$时，有 $|x_n - 1| < \frac{1}{1000}$

给定 $\frac{1}{10000}$，只要 $n > 10000$时，有 $|x_n - 1| < \frac{1}{10000}$

给定 $\varepsilon > 0$，只要 $n > N(= \left[\frac{1}{\varepsilon}\right])$时，有 $|x_n - 1| < \varepsilon$成立.

定义 如果对于$\forall \varepsilon > 0$,总存在一个正整数N,当$n > N$时,$|x_n - a| < \varepsilon$恒成立,则称当n趋于无穷大时,数列x_n以常数a为极限. 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a\,(n \to \infty)$.

如果数列没有极限,就说数列是发散的.

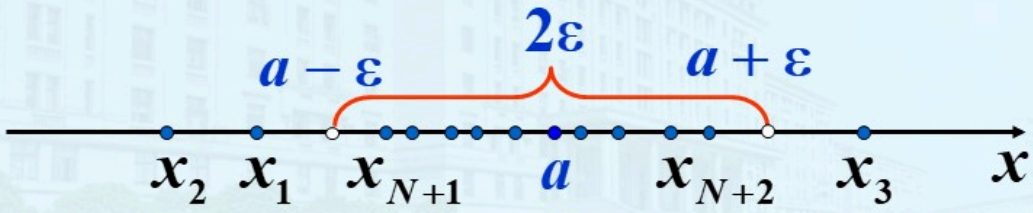
注意:

1. 该定义是极限为a的充要条件;
2. N一般随ε的缩小而变大,可以记作$N(\varepsilon)$,但不能看作ε的函数,因为ε确定时,N可以不唯一;
3. 数列前方增减修改有限项,不影响数列的极限;
4. 该定义没有给出求极限方法,但给出了判断方法.

$\varepsilon - N$定义：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，使$n > N$时，恒有

$|x_n - a| < \varepsilon$，即$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

几何解释：



当$n > N$时，所有的点 x_n都落在 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 内，只有有限个(至多只有N个) 落在其外.

单选题 1分

下面哪种说法与数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 等价?

A $\forall \varepsilon > 0$, 落在区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内的项有无限多个

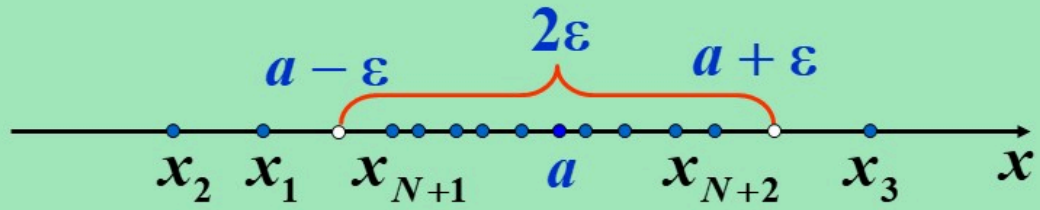
B $\forall \varepsilon > 0$, 落在区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$外的项只有有限多个

下面哪种说法与数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 等价?

A $\forall \varepsilon > 0$, 落在区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内的项有无限多个

B $\forall \varepsilon > 0$, 落在区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$外的项只有有限多个

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 使$n > N$时, 恒有$|x_n - a| < \varepsilon$.



例1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

证 $\forall\varepsilon>0$, 要使$\left|x_n-a\right|=\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立.

即 $\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, 只需$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$, 可取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,

所以$\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当$n>N$时有$\left|x_n-a\right|=\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

例2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, 其中 $|q| < 1$.

证 任给 $\varepsilon > 0$, 若 $q = 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$; 若 $0 < |q| < 1$,

要使 $|x_n - 0| = |q^n| < \varepsilon$, 即 $n\ln|q| < \ln\varepsilon$, $\therefore n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$, 取 $N = \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$,

则当 $n > N$ 时, 就有 $|q^n - 0| < \varepsilon$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

$\ln|q| < 0$

例3 设 $x_n > 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

证 任给 $\varepsilon > 0$, $\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,

$\therefore \exists N > 0$ 使得当 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$,

从而有 $\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \dfrac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

例4 若$s_n=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}\right)$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{3}$.

证 $\forall\varepsilon>0$, 要使 $\left|s_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$ 成立.

即 $\left|\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}\right)-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}\right|<\frac{1}{2n}<\varepsilon,$

只需 $n>\frac{1}{2\varepsilon}$, 取$N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$.

放大法

所以 $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$, 当$n>N$时, 有 $\left|s_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon.$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{3}.$

例5 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a + b.$$

证明 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$

$$\therefore \exists N_1, \text{当} n > N_1 \text{时}, \text{有} |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

$$\exists N_2, \text{当} n > N_2 \text{时}, \text{有} |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时有(1),(2)同时成立.

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时

有 $|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)|$

$\le |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$ 成立

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

四、数列极限的性质

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0,$ 当 $n > N$ 时,
恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 即 $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

有界性

定理1 收敛的数列必定有界.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 由定义, 取 $\varepsilon = 1$, 则 $\exists N > 0$, 当 $n > N$ 时,

恒有 $|x_n - a| < 1$, 即有 $a - 1 < x_n < a + 1$.

记 $M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_N|, |a-1|, |a+1|\}$,

则对一切自然数 n, 皆有 $|x_n| \le M$,

推论 无界数列必定发散.