定理3 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证　设函数$f(x)$在$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta_1)$内有界,

则$\exists M>0,\delta_1>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta_1$时恒有$|f(x)|\le M$.

又设α是当$x\to x_0$时的无穷小,

$\therefore \forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta_2$时恒有$|\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$时,恒有

$$|f(x)\cdot\alpha|=|f(x)|\cdot|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$ $\therefore$ 当$x\to x_0$时,$f(x)\cdot\alpha$为无穷小.

推论1 在同一过程中,有极限的变量与无穷小乘积是无穷小.

推论2 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论3 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

举例

第1个数列: $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{m+1},\cdots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ \cdots$

第2个数列: $1,\ 2,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{m+1},\cdots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ \cdots$

第3个数列: $1,\ 1,\ 3^2,\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{m+1},\cdots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ \cdots$

第4个数列: $1,\ 1,\ 1,\ 4^3,\ \cdots,\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{m+1},\cdots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ \cdots$

.....

第m个数列: $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \cdots,\ m^{m-1},\frac{1}{m+1},\cdots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ \cdots$

.....

例1　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\arctan\dfrac{1}{x}$.

解　$\because \lim\limits_{x\to\infty}\arctan\dfrac{1}{x}=0$,　又 $\left|\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right|<\left|\dfrac{2x}{\sqrt{x^2}}\right|\le\left|\dfrac{2x}{x}\right|=2$,

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\arctan\dfrac{1}{x}=0.$

例2　求 $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$, 又 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\le1$,

所以 $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0.$

二、无穷大

定义2：$\forall M>0,\exists \delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|>M$成立，

则称$f(x)$当$x\to x_0$时为无穷大，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X>0$，当$|x|>X$时，有$|f(x)|>M$成立，

  则称$f(x)$当$x\to\infty$时为无穷大.

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow$ 若$\forall M>0,\exists \delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)|>M$，

  则称$f(x)$当$x\to x_0$时为无穷大.

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ 若$\forall M>0,\exists \delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>M$，

  则称$f(x)$当$x\to x_0$时为正无穷大.

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow$ 若$\forall M>0,\exists \delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)<-M$，

  则称$f(x)$当$x\to x_0$时为负无穷大.

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X>0,$当$|x|>X$时,$|f(x)|>M.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X>0,$当$x>X$时,$|f(x)|>M.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X>0,$当$x>X$时,$f(x)>M.$

请思考并写出如下定义:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty;\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty;\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty.$$

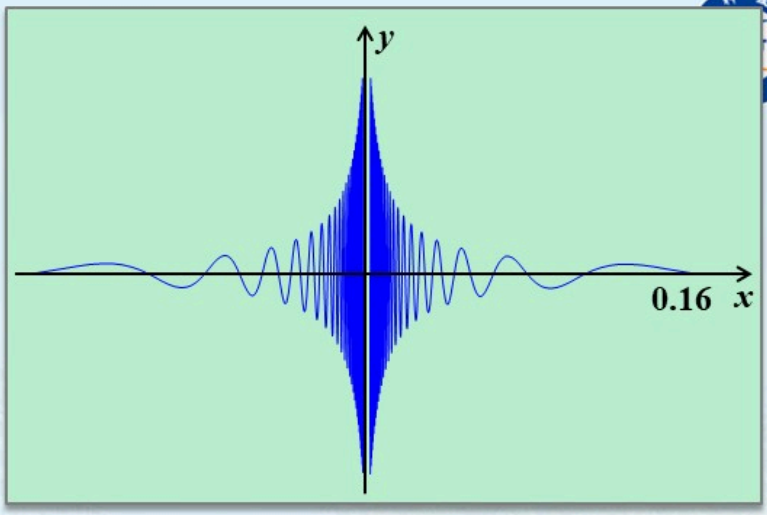
注意:

1.无穷大是变量,不能与很大的数混淆;

2.切勿将 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ 认为极限存在.

3.无穷大是一种特殊的无界变量,但是无界变量未必是无穷大.

例3　当$x \to 0$时，$y = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$是一个无界变量，但不是无穷大.



(1) 取$x_k = \dfrac{1}{2k\pi + \dfrac{\pi}{2}}$ $(k = 0,1,2,3,\cdots)$

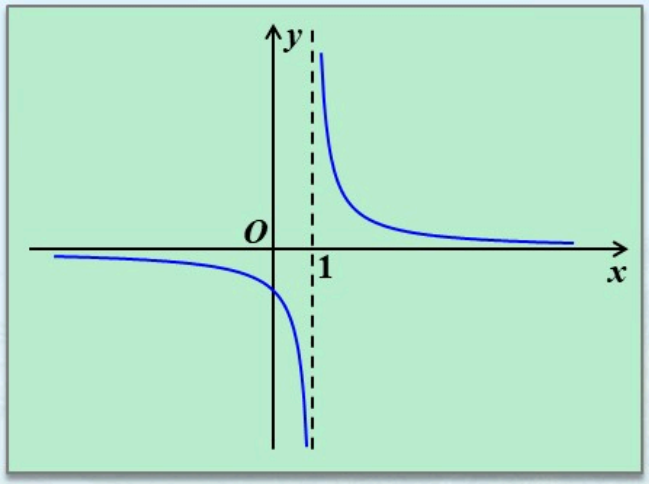
$y(x_k) = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$，对$\forall M > 0$，当$k$充分大时，$y(x_k) > M$. 说明无界

(2) 取$x_k = \dfrac{1}{2k\pi}$ $(k = 0,1,2,3,\cdots)$，且$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$，取$M = 1$，

有$y(x_k) = 2k\pi \cdot \sin 2k\pi = 0 < M$.　说明不是无穷大.

$$\forall M>0,\exists\delta>0,\text{当}0<|x-x_0|<\delta,|f(x)|>M.$$

例4　证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$



证　$\forall M>0$, 要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$,

只要 $|x-1|<\dfrac{1}{M}$,　取 $\delta=\dfrac{1}{M}$,

当$0<|x-1|<\delta=\dfrac{1}{M}$时,就有 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M.$

$\therefore\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$

定义：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$,则直线$x=x_0$是$y=f(x)$的图形的铅直渐近线.

三、无穷小与无穷大的关系

定理4 在同一过程中,无穷大的倒数为无穷小;恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty.$ $\therefore \forall \varepsilon>0,$

由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, 取 $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$, $\exists \delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

有 $|f(x)|>M=\dfrac{1}{\varepsilon}$, 即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0.$

$\therefore$ 当 $x\to x_0$ 时, $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

同理可证若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0, f(x)\neq 0,$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty.$

作 业

习题册

- 第5页
- 第6页