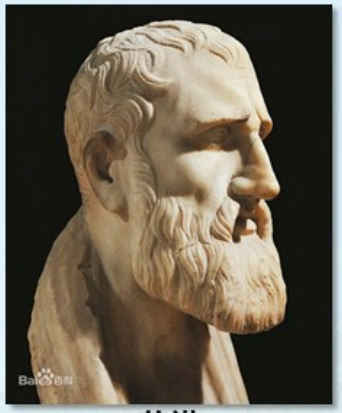

电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China
第三节 无穷小量 无穷大量
无穷小量
无穷大量
数学科学学院 汪小平

芝诺是古希腊爱利亚学派的代表人. 因提出的一些悖论而著名. 他提出的悖论是否对那个时代的数学发展起到了重大作用, 在学术界一直有争议.

但芝诺悖论在客观上把微积分中的离散和连续的对立统一惹人注目地摆了出来, 对微积分发展有一定的影响.

美国数学史家E.T.贝尔(Bell)曾说, 芝诺曾"以非数学的语言, 记录下了最早同连续性和无限性格斗的人们所遭遇到的困难."



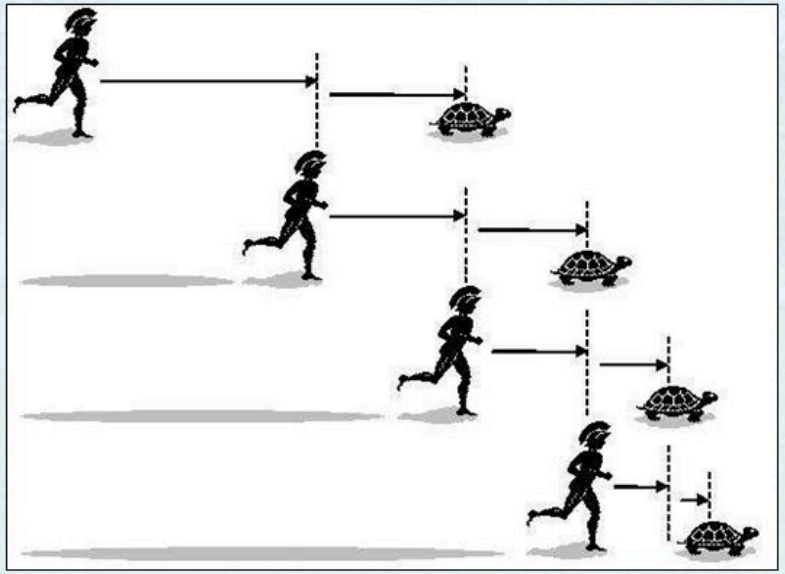
芝诺
(约公元前490–前425)
古希腊数学家、哲学家

芝诺常用归谬法从反面去证明论点. 比如, 他反对"多"的理由是: 把一物无限的细分下去, 到最小最小的程度以后, 如果这些最小单位无体积 (即其体积为零), 则它们加到一起以后体积仍为零; 如果这些单位有体积 (即其体积不为零), 则它们之和应为无限大; 于是产生矛盾. 所以物体不能细分, 从而"多"不存在.

阿喀琉斯追乌龟

阿喀琉斯是古希腊神话中善跑的英雄，在他和乌龟的竞赛中，**他的速度为乌龟的10倍，乌龟在他前面100米开始跑**，他在后面追，芝诺断定他不可能追上乌龟——因为在竞赛中，**追者首先必须到达被追者的出发点**，当阿喀琉斯追到100米时，乌龟已经又向前爬了10米，于是，一个新的起点产生了；

阿喀琉斯必须继续追，而当他追到乌龟爬的这10米时，乌龟又已经向前爬了1米，阿喀琉斯只能再追向那个1米。就这样，乌龟会制造出无穷个起点，它总能在起点与自己之间制造出一个距离，不管这个距离有多小，但只要乌龟不停地奋力向前爬，阿喀琉斯就永远也追不上乌龟。这显然导致了一个悖论。



一、无穷小

1. 定义：极限为零的变量称为无穷小.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有$|f(x) - 0| < \varepsilon$成立 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，

称$f(x)$当$x \to x_0$时为无穷小.

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，当$|x| > X$时，有$|f(x) - 0| < \varepsilon$成立 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$，

称$f(x)$当$x \to \infty$时为无穷小.

$\because \lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$　　$\therefore$ 函数$\sin x$是当$x \to 0$时的无穷小.

$\because \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$　　$\therefore$ 函数$\dfrac{1}{x}$是当$x \to \infty$时的无穷小.

$\because \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$　　$\therefore$ 数列$\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$是当$n \to \infty$时的无穷小.

2.无穷小与函数极限的关系

定理1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$, 其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0.$

证 **必要性** 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,$

则$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当时$0<|x-x_0|<\delta$时有$|f(x)-A|<\varepsilon.$

记$\alpha(x)=f(x)-A \Rightarrow |\alpha(x)|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,$ 因此 $f(x)=A+\alpha(x).$

充分性 设 $f(x)=A+\alpha(x),$其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,$

则$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$当$0<|x-x_0|<\delta$时有$|\alpha(x)|<\varepsilon,$

由$\alpha(x)=f(x)-A,$ 所以$|f(x)-A|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A.$

$$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x) \Leftrightarrow f(x)-A=\alpha(x) \Leftrightarrow \lim[f(x)-A]=0$$
$$\Leftrightarrow \lim|f(x)-A|=0$$

单选题 1分

若有数列$\{x_n\}$,且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则∃数列$\{\alpha_n\}$,使得$\alpha_n = x_n - a$,且$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. 试判断:

A 上面说法一定正确

B 上面说法一定错误

C 上面说法不一定正确

D 上面说法中条件与结论没有关系

雨课堂 Rain Classroom

3.无穷小的运算性质

定理2 有限个无穷小的代数和是无穷小.

下面以两个无穷小的代数和仍为无穷小为例进行证明:

设 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\alpha(x)\pm\beta(x)\right]=0.$

证 对$\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0\Rightarrow\exists\delta_1>0$,当$0<\left|x-x_0\right|<\delta_1$时,$\left|\alpha(x)\right|<\varepsilon.$

由 $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0\Rightarrow\exists\delta_2>0$,当$0<\left|x-x_0\right|<\delta_2$时,$\left|\beta(x)\right|<\varepsilon.$

取$\delta=\min\left\{\delta_1,\delta_2\right\}$, 则当$0<\left|x-x_0\right|<\delta$时,有

$$\left|\alpha(x)\pm\beta(x)\right|\le\left|\alpha(x)\right|+\left|\beta(x)\right|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\alpha(x)\pm\beta(x)\right]=0.$

定理3 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证　设函数$f(x)$在$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta_1)$内有界,

则$\exists M>0,\delta_1>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta_1$时恒有$|f(x)|\le M$.

又设α是当$x\to x_0$时的无穷小,

$\therefore \forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta_2$时恒有$|\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$时,恒有

$$|f(x)\cdot\alpha|=|f(x)|\cdot|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,\ \therefore \text{当}x\to x_0\text{时},f(x)\cdot\alpha\text{为无穷小}.$$

推论1 在同一过程中,有极限的变量与无穷小乘积是无穷小.

推论2 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论3 有限个无穷小的乘积也是无穷小.