
电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China
第四节 极限的性质及运算法则
极限运算法则
求极限方法举例
数学科学学院 汪小平

一、极限运算法则

定理 设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$, 则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, 其中$B\neq 0$.

证 $\because \lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B.$

$\therefore f(x)=A+\alpha,\ g(x)=B+\beta.$ 其中$\alpha\to 0, \beta\to 0.$

$[f(x)\pm g(x)]=(A\pm B)+(\alpha\pm\beta)$ $\because(\alpha\pm\beta)\to 0.$ $\therefore$ (1)成立.

$[f(x)\cdot g(x)]=(A+\alpha)(B+\beta)=AB+[(A\beta+B\alpha)+\alpha\beta]$

$\because[(A\beta+B\alpha)+\alpha\beta]\to 0.$ $\therefore \lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B.$

推论1 若$\lim f(x)$存在, C为常数,则 $\lim[Cf(x)]=C\lim f(x).$

推论2 若$\lim f(x)$存在, n是正整数,则 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n.$

二、求极限方法举例

特点：分子分母极限均存在且分母极限不为0

结论：分子分母分别求极限，再相除

例1 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)=\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$$=(\lim_{x\to 2}x)^2-3\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5=2^2-3\cdot 2+5=3\neq 0,$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)}=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}.$$

注：1. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，且 $Q(x_0)\neq 0$，则有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x-3)=0,\ \lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3\neq 0,$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{4x-1}=\dfrac{0}{3}=0.$ 由无穷小与无穷大的关系,

得 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty.$

分母极限为0，但分子极限不为0
结果：无穷大

例3 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}.$ $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{1}{2}.$

特点：分子分母极限均为0
方法：化去零因子、洛必达法则等

例4　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.　$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

特点：极限均为无穷大
方法：利用无穷小、洛必达法则等

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)}=\dfrac{2}{7}.$

注：当$a_0\neq 0, b_0\neq 0, m$和n为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当}n=m,\\ 0, & \text{当}n>m,\\ \infty, & \text{当}n<m,\end{cases}$$

单选题 1分

练习1 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}$.

A 1　　B $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{20}$　　C 0　　D ∞

练习1 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^{30}}{(2x+1)^{30}}\cdot\frac{(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{20}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^{30}}{(2x+1)^{30}}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{20}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{30}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)^{20}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{30}\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2}{2x+1}\right)^{20}$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{20}$$

例5 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

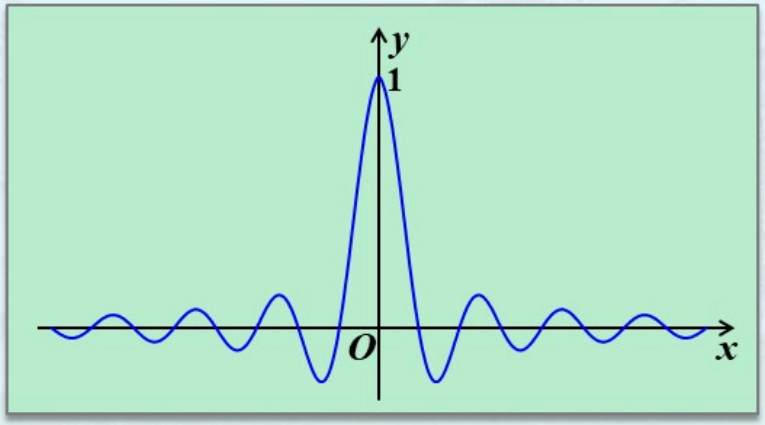
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})=\frac{1}{2}.$$

特点：无穷项的和式极限
方法：求和后再求极限、夹逼准则、定积分、无穷级数等

例6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$ 而 $|\sin x|\le 1,$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$



有界函数乘无穷小、有极限的函数乘无穷小、有限个无穷小相乘。

例7 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{|2x-1|-|2x+1|}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{|2x-1|-|2x+1|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\left(|2x-1|+|2x+1|\right)}{(2x-1)^2-(2x+1)^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\left(|2x-1|+|2x+1|\right)}{-8x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x-1|+|2x+1|}{-4}=-\dfrac{1}{2}$

另解 限定$|x|<\dfrac{1}{2}$,则

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{|2x-1|-|2x+1|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{(1-2x)-(2x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{-4x}=-\dfrac{1}{2}$

定理 (复合函数运算法则)

设函数 $u=\varphi(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, 但在点 x_0 的某去心邻域内 $u=\varphi(x)\neq a$, 又

又 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$, 则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 当 $x\to x_0$ 时的极限也存在, 且

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A,\ \text{即}\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a}f(u)=A$$

证 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A\Rightarrow\exists\eta>0$, 当 $0<|u-a|<\eta$ 时, $|f(u)-A|<\varepsilon$.

对于 $\eta>0$, 由 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a\Rightarrow\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $0<|\varphi(x)-a|=|u-a|<\eta$.

两者综合起来, 则对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(u)-A|<\varepsilon$.

即 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A=\lim\limits_{u\to a}f(u)$.

注: 1. 定理中将 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$ 改为 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$,

而 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$ 改为 $\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A$, 可得类似结论.

这就是常用的变量代换法

2.定理表明: 满足定理的条件, 即有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$

例8　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x$.

解　令 $u=\sin x,\ x\to\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow u\to 1,$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x=\lim_{u\to 1}\ln u=\ln 1=0$$

例9　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ $(n$为正整数$)$.

解　设 $u=\sqrt[n]{1+x},x=u^n-1,$ 则当$x\to 0$时,$u\to 1.$

$$\text{故}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{u^n-1}=\lim_{u\to 1}\frac{1}{u^{n-1}+u^{n-2}+\cdots+u+1}=\frac{1}{n}.$$

$$1+u+u^2+\cdots+u^{n-1}=\frac{1-u^n}{1-u}$$

考虑：$x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}$

由此可得：$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$