例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$

解 $\because x\to 0$时，$1-\cos 2x\sim\dfrac{1}{2}(2x)^2$，$\sqrt[3]{1+x^2}-1\sim\dfrac{x^2}{3}$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{\frac{x^2}{3}}=6$$

例6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2(\sqrt{1+x}-1)}$.

解 $\because x\to 0$，$\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$，$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2(\sqrt{1+x}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^2\cdot\frac{1}{2}x}=1.$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

解 $\because x\to 0,\sqrt{1+x\sin x}-1\sim\dfrac{1}{2}x\sin x, e^{x^2}-1\sim x^2$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

例8 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(1+e^{ax})\ln(1+\dfrac{b}{x})\right]\quad(a>0)$

解 $$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln[e^{ax}(1+e^{-ax})]\cdot\frac{b}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[[ax+\ln(1+e^{-ax})]\cdot\frac{b}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[ab+\ln(1+e^{-ax})\cdot\frac{b}{x}\right]=ab+\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(1+e^{-ax})\cdot\frac{b}{x}\right]$$

$$=ab+\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-ax}\cdot\frac{b}{x}\right)=ab+\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{e^{ax}x}=ab$$

例9　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^{x})-\cos(xe^{-x})}{(\sin x)^{3}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(xe^{x})-\cos(xe^{-x})}{(\sin x)^{3}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin\dfrac{x(e^{x}+e^{-x})}{2}\sin\dfrac{x(e^{x}-e^{-x})}{2}}{x^{3}}$

$=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x(e^{x}+e^{-x})}{2}\cdot\dfrac{x(e^{x}-e^{-x})}{2}}{x^{3}}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}(e^{x}+e^{-x})\dfrac{(e^{x}-e^{-x})}{x}$

$=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}(e^{x}+e^{-x})\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{x}=-\lim\limits_{x\to 0}e^{-x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=-2$

$\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

另解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(xe^{x})-\cos(xe^{-x})}{(\sin x)^{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{x(e^{x}+e^{-x})}{2}\sin\dfrac{x(e^{x}-e^{-x})}{2}}{x^{3}}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x(e^{x}+e^{-x})}{2}\cdot\dfrac{x(e^{x}-e^{-x})}{2}}{x^{3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(e^{x}+e^{-x})\frac{(e^{x}-e^{-x})}{x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(e^{x}+e^{-x})\cdot\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-1)-(e^{-x}-1)}{x}$$

两项有极限说明前面添项裂项是正确的.

$$=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x}-1}{x}-\frac{e^{-x}-1}{x}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-2.$$

注：本题还可以结合用导数定义或洛必达法则完成。

例10 求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x^2-a^2},a>0.$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-a^a+a^a-x^a}{(x+a)(x-a)}=\dfrac{1}{2a}\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-a^a}{x-a}+\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^a-x^a}{x-a}\right)$

$=\dfrac{a^a}{2a}\left(\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{x-a}-1}{x-a}+\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1-(x/a)^a}{x-a}\right)$

其中，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{x-a}-1}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)\ln a}{x-a}=\ln a$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1-(\frac{x}{a})^a}{x-a}=-\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(1+\frac{x}{a}-1)^a-1}{x-a}=-\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a(\frac{x}{a}-1)}{x-a}=-1$

所以，原式 $=\dfrac{a^a(\ln a-1)}{2a}.$

当 $t\to 0$ 时，$a^t-1\sim t\ln a$

$(1+t)^\alpha-1\sim \alpha t$

用等价无穷小可给出函数的近似表达式:

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1\Rightarrow\lim\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)=\lim\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=0,$$

即 $\beta-\alpha=o(\alpha)$,

于是有 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=1\Rightarrow\lim\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)=\lim\frac{\alpha-\beta}{\beta}=0,$$

即 $\alpha-\beta=o(\beta)$,

于是有 $\alpha=\beta+o(\beta)$.

例如: $\sin x=x+o(x),\ 1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$.

例11 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 5x-\cos x+1}{\sin 3x}$.

解 $\because \tan 5x=5x+o(x), 1-\cos x=\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\ \sin 3x=3x+o(x)$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{5x+o(x)+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{3x+o(x)}=\lim_{x\to0}\frac{5+\frac{o(x)}{x}+\frac{1}{2}x+\frac{o(x^2)}{x}}{3+\frac{o(x)}{x}}=\frac{5}{3}.$$

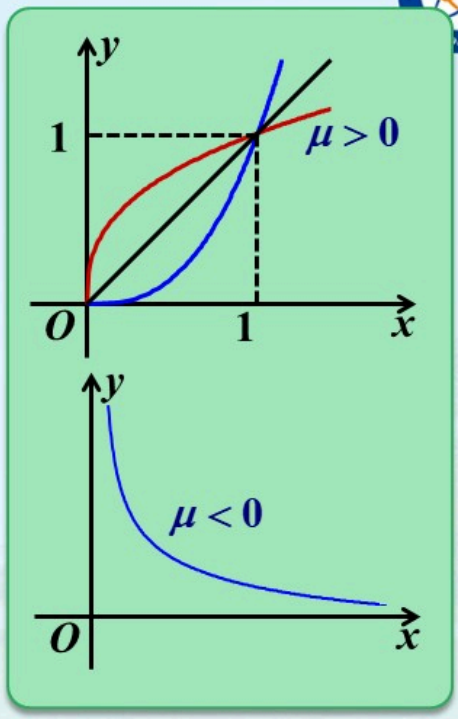
例12 当$x \to 0$时,下列无穷小是几阶无穷小?

(1) $\tan 2x \sin 3x$. (2) $2\sqrt{x}+x+x^2$;

解
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}+x+x^2}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\left(2x^{\frac{1}{2}-k}+x^{1-k}+x^{2-k}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}-k}\left(2+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$=2\lim_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}-k}.$$

要使$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}-k}$为非零常数, 必有$\frac{1}{2}-k=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$,

故当$x \to 0^+$时, $2\sqrt{x}+x+x^2$为$\frac{1}{2}$阶无穷小.



作 业

习题册

- 第8页 ☛ 2
- 第9页 ☛ 3、4