
电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China
第六节 连续函数(续)
最大最小值定理
介值定理
数学科学学院 汪小平

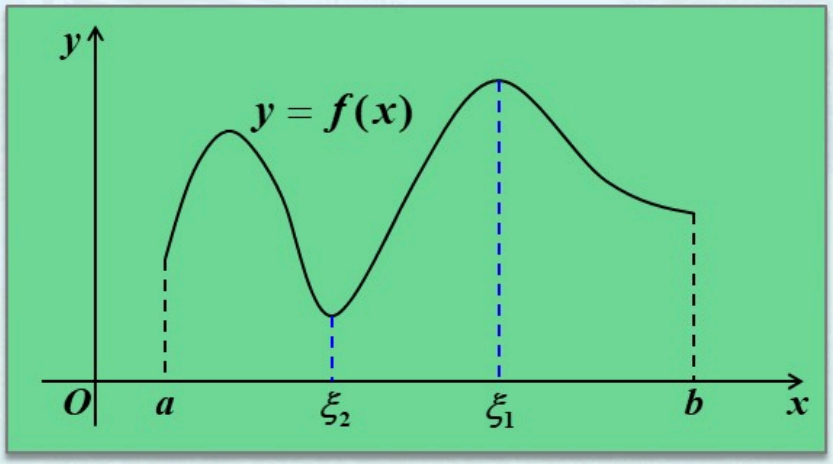
一、最大值和最小值定理

定义 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$, 如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任意 $x \in I$ 都有 $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$, 则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大(小)值**.

例如: $y = 1 + \sin x$, 在 $[0, 2\pi]$ 上, $y_{\max} = 2, y_{\min} = 0$;

定理1(最大值和最小值定理) 在闭区间上连续的函数一定存在最大值和最小值.

若 $f(x) \in C[a,b]$,
则 $\exists \xi_1, \xi_2 \in [a,b]$,
使得 $\forall x \in [a,b]$,
有 $f(\xi_1) \ge f(x)$,
$f(\xi_2) \le f(x)$.

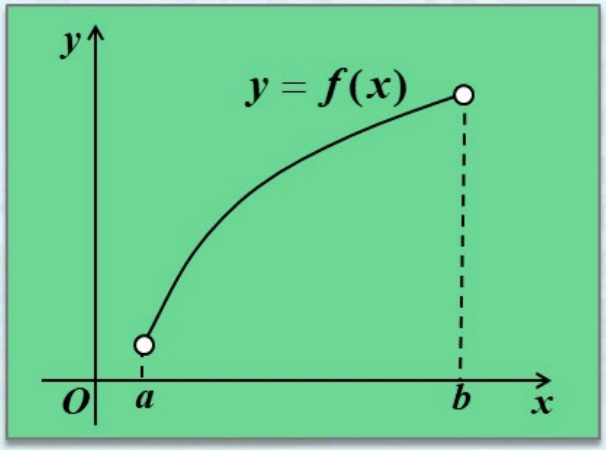


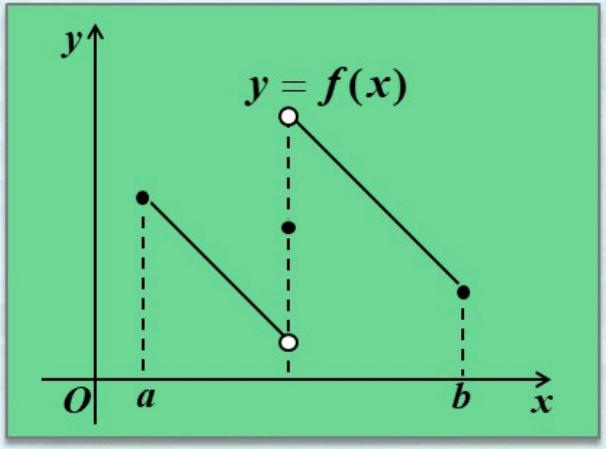
若$f(x)\in C[a,b]$,则$\exists \xi_1,\xi_2\in[a,b]$,
使得$\forall x\in[a,b]$,有$f(\xi_1)\geq f(x), f(\xi_2)\leq f(x)$.

注意:

1.若区间是开区间, 定理不一定成立;

2.若区间内有间断点, 定理不一定成立.





定理2(有界性定理) 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

证 设$f(x)\in C[a,b]\Rightarrow \forall x\in[a,b],\exists m,M$,有$m\leq f(x)\leq M$,

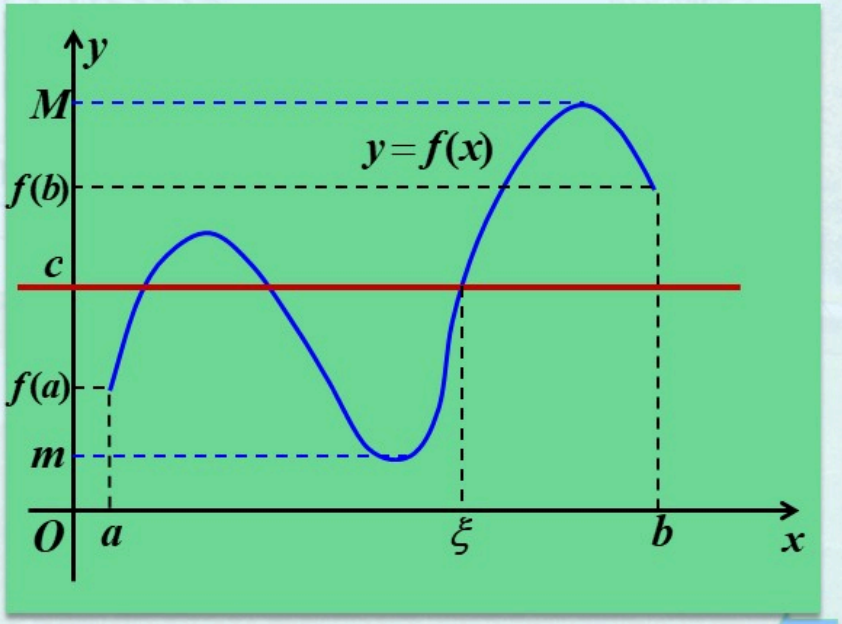
取$K=\max\{|m|,|M|\}$, 则有$|f(x)|\leq K$. $\therefore$函数$f(x)$在$[a,b]$上有界.

二、介值定理

定理(介值定理) 设$f(x)\in C[a,b]$且$f(a)\neq f(b)$,若$f(a)<c<f(b)$ $\big($或$f(b)<c<f(a)\big)$,其中c为常数,则存在$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=c$.

从几何上看,从点$\big(a,f(a)\big)$到点$\big(b,f(b)\big)$的连续曲线与直线$y=c$至少有一个交点.

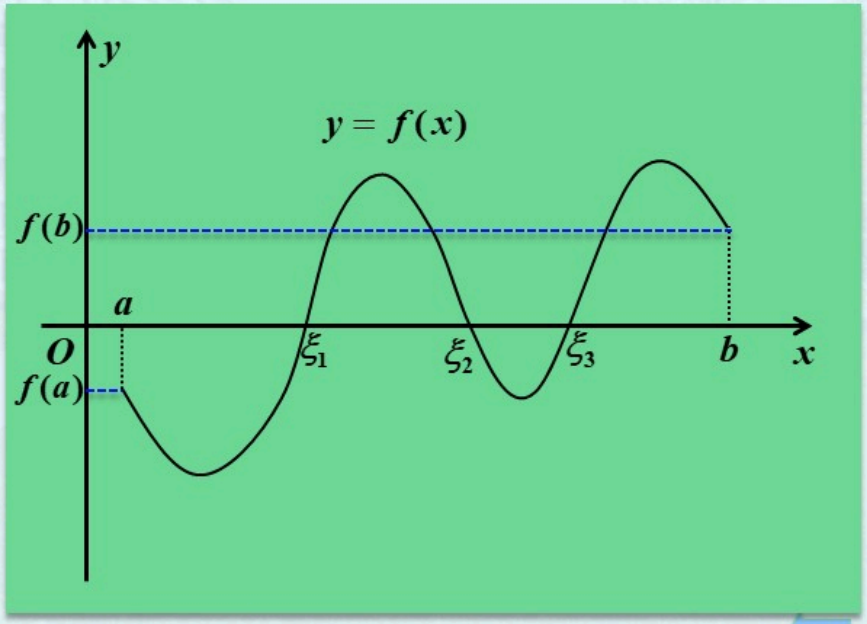
推论1 若$f(x)\in C[a,b]$, M,m分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值,则对任意常数$c,m<c<M$, $\exists\xi\in(a,b)$,使$f(\xi)=c$.



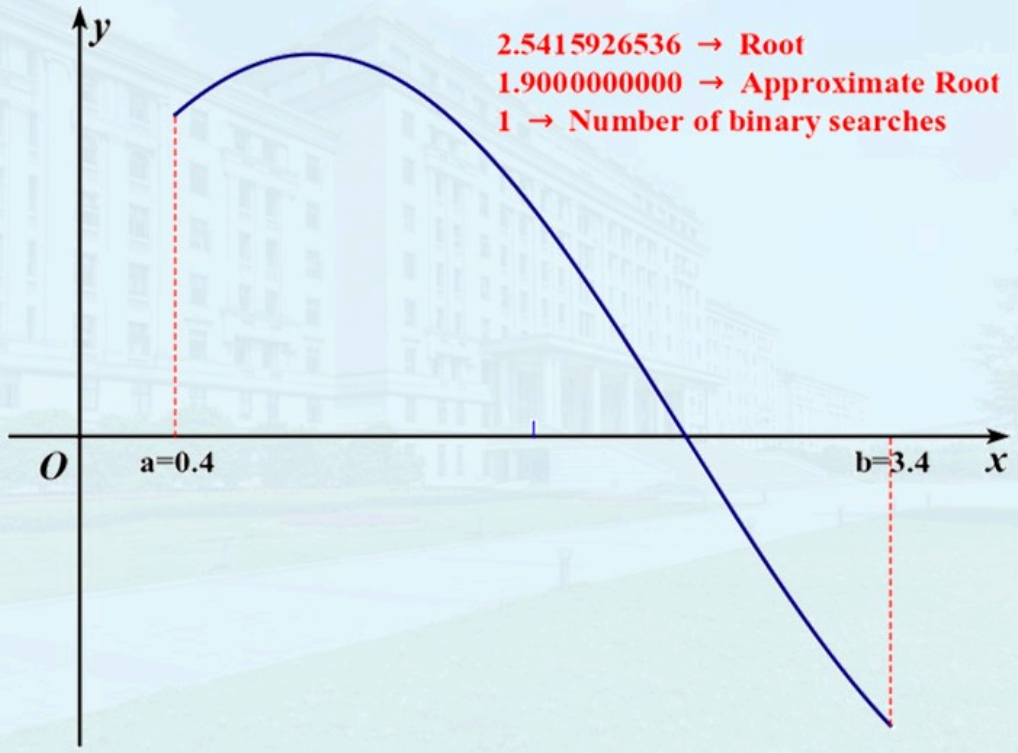
推论2(零点存在定理)设函数$f(x)$在闭区闭$[a,b]$上连续,且$f(a)$与$f(b)$异号,即$f(a)\cdot f(b)<0$,那么在开区间(a,b)内至少有函数$f(x)$的一个零点,即至少有一点$\xi(a<\xi<b)$使$f(\xi)=0$.
也就是方程$f(x)=0$在(a,b)内至少存在一个实根.

几何解释:
连续曲线弧$y=f(x)$的两个端点位于x轴的不同侧,则曲线弧与x轴至少有一个交点.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\in C[a,b] \\ f(a)\cdot f(b)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \xi\in(a,b), \text{使} f(\xi)=0.$$



二分法求根动画


y
2.5415926536 → Root
1.9000000000 → Approximate Root
1 → Number of binary searches
O
a=0.4
b=3.4
x

推论3 若$f(x)\in C[a,b]$,且$f(x)$在$[a,b]$上单调,且$f(a)\cdot f(b)<0$,则存在唯一的点$\xi\in(a,b)$,使$f(\xi)=0$.

例1 证明方程$x^3-4x^2+1=0$在区间$(0,1)$内至少有一根.

证 令$f(x)=x^3-4x^2+1$, 则$f(x)$在$[0,1]$上连续,

又$f(0)=1>0, f(1)=-2<0$, 由零点定理,

$\exists\xi\in(0,1)$,使$f(\xi)=0$, 即$\xi^3-4\xi^2+1=0$,

$\therefore$方程$x^3-4x^2+1=0$在$(0,1)$内至少有一根ξ.

例2 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,且$f(a)<a, f(b)>b$.证明:
$\exists \xi \in (a,b)$,使得$f(\xi)=\xi$.

证 令$F(x)=f(x)-x$, 则$F(x)$在$[a,b]$上连续,
而$F(a)=f(a)-a<0$, $F(b)=f(b)-b>0$, 由零点定理,
$\exists \xi \in (a,b)$,使$F(\xi)=f(\xi)-\xi=0$, 即$f(\xi)=\xi$.

例3 设$f(x)\in C[a,b], g(x)\in C[a,b]$,且$f(a)>g(a), f(b)<g(b)$.
证明:$\exists \xi \in (a,b)$,使$f(\xi)=g(\xi)$.

证 设$F(x)=f(x)-g(x), F(x)\in C[a,b]$.
$\because F(a)=f(a)-g(a)>0$, $F(b)=f(b)-g(b)<0$,
$\therefore F(a)\cdot F(b)<0 \Rightarrow \exists \xi \in (a,b)$,使得$F(\xi)=0 \Rightarrow f(\xi)=g(\xi)$.

例4 设$f(x)$为$[0,1]$上非负连续函数, $f(0)=f(1)=0$, 试证: ζ: zeta

对于$\forall \alpha(0<\alpha<1), \exists \zeta \in [0,1)$, 使得$f(\zeta)=f(\zeta+\alpha)$.

证 令$F(x)=f(x)-f(x+\alpha)$, 其定义域为$[0,1-\alpha]$.

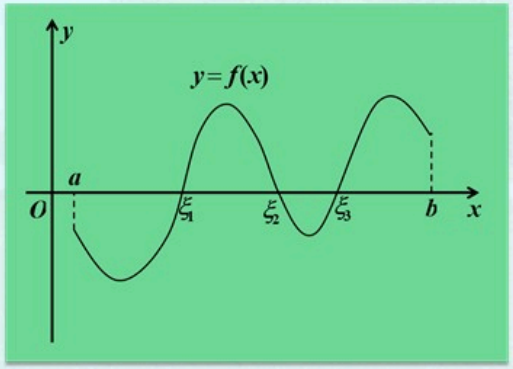
$$\left.\begin{aligned} F(0)&=f(0)-f(\alpha)=-f(\alpha)\le 0,\\ F(1-\alpha)&=f(1-\alpha)-f(1)=f(1-\alpha)\ge 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(0)\cdot F(1-\alpha)\le 0$$

若$f(\alpha)=0$或$f(1-\alpha)=0$, 则取$\zeta=0$或$\zeta=1-\alpha$;

若$f(\alpha)\neq 0, f(1-\alpha)\neq 0$, 则有$F(0)F(1-\alpha)<0$,

显然$F(x)$在$[0,1-\alpha]$上连续,

故必存在$\zeta \in [0,1-\alpha]\subset[0,1)$, 使得$F(\zeta)=0$.



综上所述$\exists \xi \in [0,1)$使得$F(\xi)=0$, 即$f(\zeta)=f(\zeta+\alpha)$.

介值定理的推广

介值定理 设$f(x)\in C[a,b]$且$f(a)\neq f(b)$,若$f(a)<c<f(b)\big($或$f(b)<c<f(a)\big)$,
其中c为常数,则存在$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=c$.

推广一 设$f(x)\in C[a,+\infty)$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$存在,且$f(a)\neq B$,若$f(a)<c<B$
$\big($或$B<c<f(a)\big)$,其中c为常数,则存在$\xi\in(a,+\infty)$,使得$f(\xi)=c$.

推广二 设$f(x)\in C(-\infty,+\infty)$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$,且$A\neq B$,若$A<c<B$
$\big($或$B<c<A\big)$,其中c为常数,则存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$,使得$f(\xi)=c$.

推广三 设$f(x)\in C[a,b)$,$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$存在,且$f(a)\neq B$,若$f(a)<c<B$
$\big($或$B<c<f(a)\big)$,其中c为常数,则存在$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=c$.

推广四 设$f(x)\in C(a,b)$,$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$,且$A\neq B$,若$A<c<B$
$\big($或$B<c<A\big)$,其中c为常数,则存在$\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=c$.

作 业

习题册

- 第11页 ☛ 10、11、12、13、15

并请尽快完成复习题一

- 第12页
- 第13页