间断点的分类：

定义：若点x_0为$f(x)$的间断点，但$f(x)$在点x_0的左右极限均存在

$\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\text{均存在}\right)$，则称点$x_0$为$f(x)$的第一类间断点.

凡不是第一类间断点的间断点称为第二类间断点.

第一类间断点$\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\text{均存在}\right)$又可分为：

1. 可去型间断点：如果$f(x)$在点x_0处的极限存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0)$，
   或$f(x)$在点x_0处无定义，则称点x_0为函数$f(x)$的可去间断点.

2. 跳跃型间断点：如果$f(x)$在点x_0处左，右极限都存在，但
   $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，则称点$x_0$为函数$f(x)$的跳跃型间断点.

例4 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1\\ 1+x, & x>1,\end{cases}$ 在 $x=1$ 处的连续性.

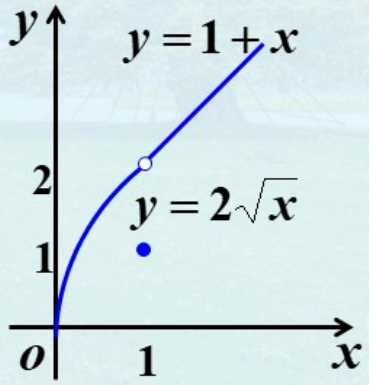
解 $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} 2\sqrt{x}=2,\quad \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(1+x)=2,$

$\because \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to1} f(x)=2,$

$\because \lim\limits_{x\to1} f(x)=2\neq f(1)\quad \therefore\ x=1$ 为函数的可去间断点.

提示 可去间断点只要改变或者补充间断处函数的定义, 则可使其变为连续点.

令 $f(1)=2$, 则 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ 1+x, & x\ge1,\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续.

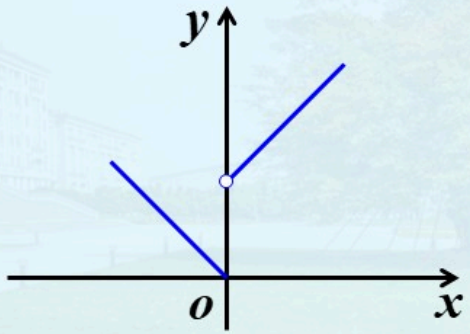


例5 讨论函数$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ 1+x, & x>0,\end{cases}$在$x=0$处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)=1,$

$\because \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

$\therefore$ $x=0$为函数的跳跃间断点.



第二类间断点

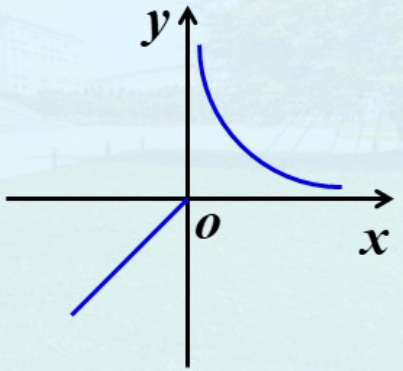
如果$f(x)$在点x_0处的左、右极限至少有一个不存在,则称点x_0为函数$f(x)$的第二类间断点.

例6 讨论函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x, & x\le 0,\end{cases}$在$x=0$处的连续性.

解 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0,$

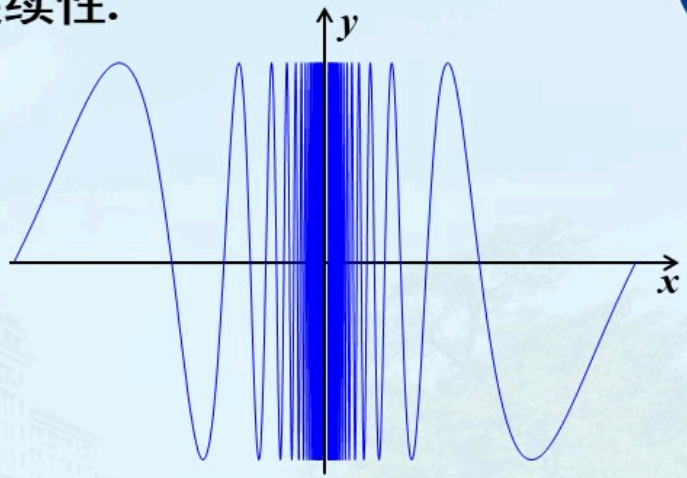
$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty,$

$\therefore x=0$为函数的第二类间断点.



这种情况称为无穷间断点.

例7 讨论函数$f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$在$x=0$处的连续性.



解 ∵在$x=0$处没有定义,

且$\lim\limits_{x\to0^-}\sin\dfrac{1}{x},\lim\limits_{x\to0^+}\sin\dfrac{1}{x}$不存在.

∴$x=0$为第二类间断点.

这种情况称为振荡型间断点.

例8 当a取何值时,函数$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\geq0,\end{cases}$在$x=0$处连续.

解 ∵$f(0)=a$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\cos x=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+x)=a$,

要使$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)\Rightarrow a=1$,

故当且仅当$a=1$时,函数$f(x)$在$x=0$处连续.

三、连续函数的四则运算

定理1 若函数$f(x), g(x)$在点x_0处连续, 则$f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0)$在点$x_0$处也连续.

例如: $\sin x, \cos x$在$(-\infty, +\infty)$内连续,

故 $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$在其定义域内连续.

四、反函数与复合函数的连续性

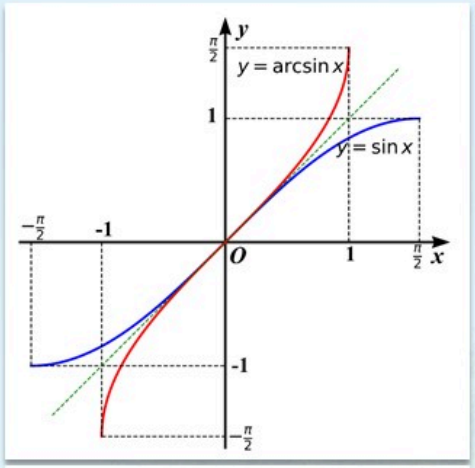
定理2 单调连续函数的反函数必单调连续.

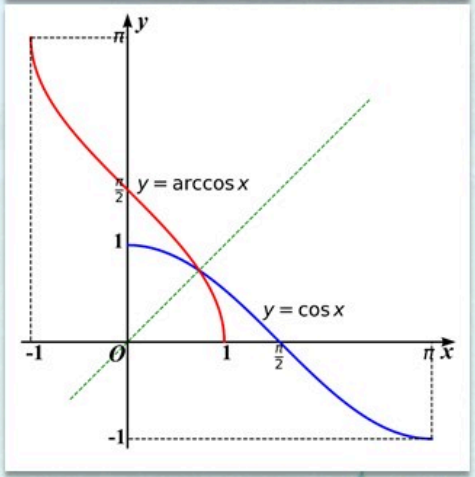
例如: $y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上单调增加且连续,

故$y=\arcsin x$在$[-1,1]$上也是单调增加且连续.

同理 $y=\arccos x$在$[-1,1]$上单调减少且连续;

结论: 反三角函数在其定义域内皆连续.





定理3 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,函数$f(u)$在点$a$连续,则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)$

$=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.

证 $\forall\varepsilon>0$, $f(u)$在点$u=a$连续 $\Rightarrow\exists\eta>0$,当$|u-a|<\eta$时,

恒有$|f(u)-f(a)|<\varepsilon$成立.

又由 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$ $\Rightarrow$ 对于$\eta>0,\exists\delta>0$,当$0<|x-x_0|<\delta$时,

恒有$|\varphi(x)-a|=|u-a|<\eta$成立.

将上面两步合起来:$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$|f(u)-f(a)|=$

$|f[\varphi(x)]-f(a)|<\varepsilon$成立. $\therefore\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$.

注:若外层函数连续,则极限符号可以与函数符号互换.

例: $\lim f(x)^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$ $(f(x)>0,\lim g(x)\ln f(x)$存在)

例1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln e=1.$

同理可得 : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$　即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{\frac{x}{\ln a}}=1$

例2　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解　令 $e^x-1=y$, 则 $x=\ln(1+y)$,当$x\to 0$时, $y\to 0$.

$$\text{原式}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}=1.$$

同理可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x\ln a}=1$

定理4 设函数$u=\varphi(x)$在点$x=x_0$连续,且$\varphi(x_0)=u_0$,而函数$y=f(u)$在点$u=u_0$连续,则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点$x=x_0$也连续.

注意 定理4是定理3的特殊情况.

例如, $u=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续,

$y=\sin u$ 在 $(-\infty,+\infty)$内连续,

$\therefore y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$内连续.

五、初等函数的连续性

▲ 三角函数及反三角函数在它们的**定义域内**是连续的.

▲ 指数函数$y=a^x\,(a>0,a\neq 1)$在$(-\infty,+\infty)$内单调且连续;

▲ 对数函数$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$在$(0,+\infty)$内单调且连续;

▲ $y=x^\mu=e^{\mu\ln x}\Rightarrow y=e^u$, 而$u=\mu\ln x$在$(0,+\infty)$内连续

$\Rightarrow y=x^\mu$在其定义域内连续

定理5 一切初等函数在其**定义区间内**都是连续的.

定义区间是指包含在定义域内的区间.

1. 初等函数仅在其定义区间内连续, 在其定义域内不一定连续;

例如, $y=\sqrt{\cos x-1}$, $D:x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots$

这些孤立点的邻域内没有定义.

$y=\sqrt{x^2(x-1)^3}, D: x=0,$ 及$x\geq 1,$

在0点的较小邻域内没有定义. 函数在区间$[1,+\infty)$上连续.

2. $f(x)$在点x_0连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$

例3 求$\lim\limits_{x\to 1}\sin\sqrt{e^x-1}.$

解 原式$=\sin\sqrt{e^1-1}=\sin\sqrt{e-1}.$

例4 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}.$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}=\dfrac{0}{2}=0.$

作 业

习题册

- 第10页 ☛ 1、2、3、4、5
- 第11页 ☛ 6、7、8