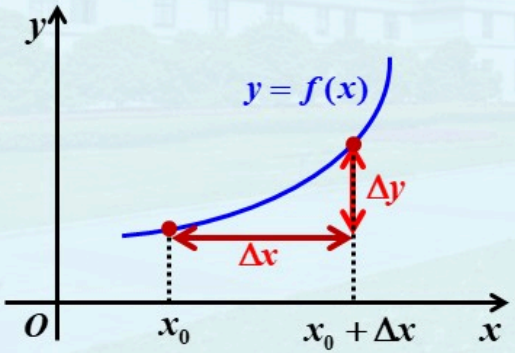

电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China
第六节 连续函数
函数的连续性
函数的间断点
连续函数的四则运算
反函数与复合函数的连续性
初等函数的连续性
数学科学学院 汪小平

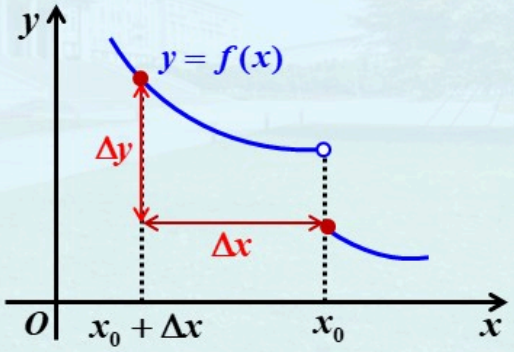
一、函数的连续性

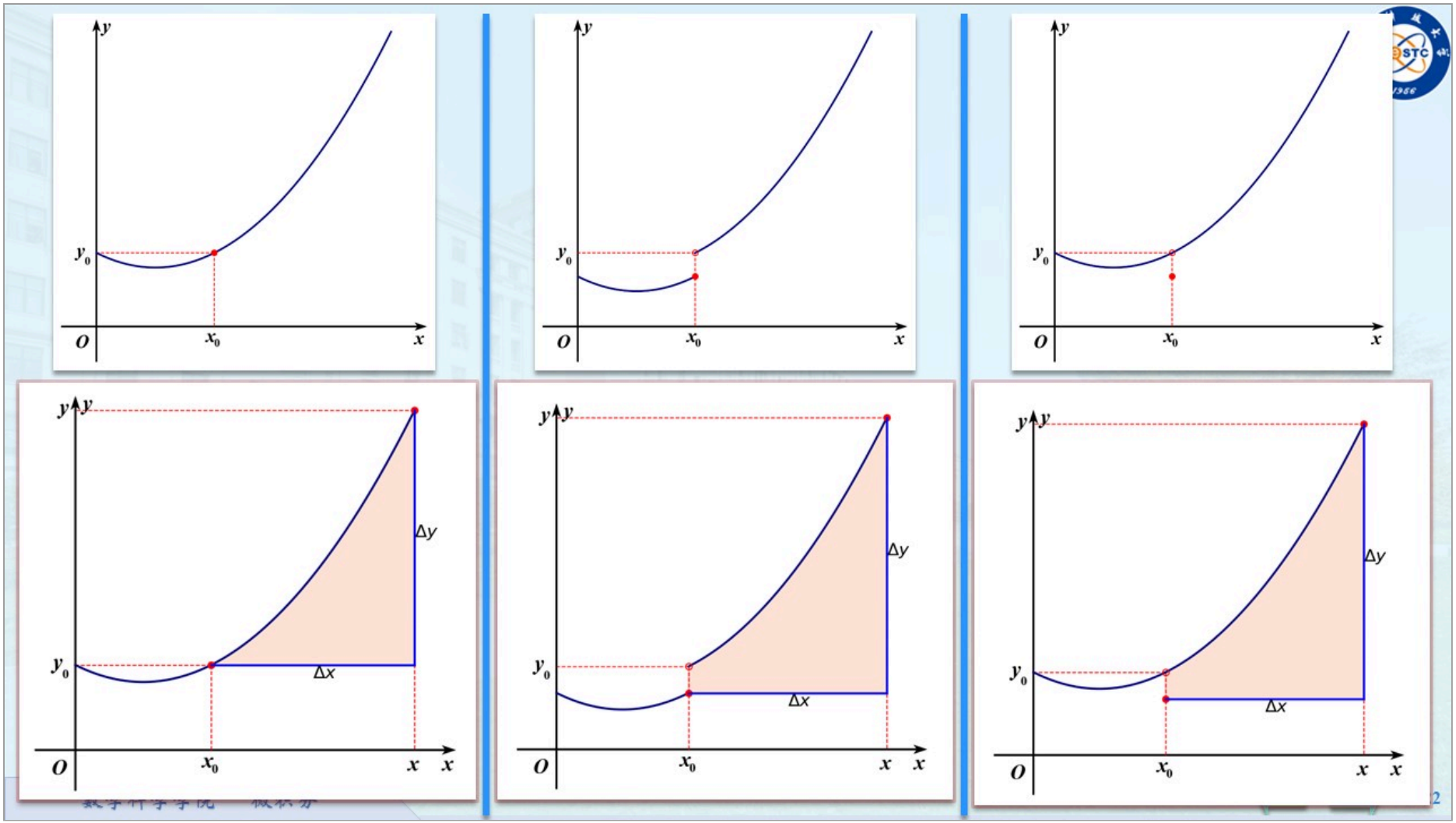
$x = x_0 + \Delta x$

1.函数的增量

设函数$f(x)$在$U(x_0,\delta)$内有定义,$x \in U(x_0,\delta)$,$\Delta x = x - x_0$ 称为自变量在点x_0的增量$(x = x_0 + \Delta x)$,$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 称为函数$f(x)$相应于Δx的增量.






y
y_0
O
x_0
x
Δy
Δx

2. 连续的定义

定义1 设函数 $f(x)$在$U(x_0,\delta)$内有定义,如果当自变量的增量Δx趋向于零时,对应的函数增量Δy也趋向于零,即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$,那么就称函数$f(x)$在点$x_0$连续,$x_0$称为$f(x)$的连续点.

设$x=x_0+\Delta x,\Delta y=f(x)-f(x_0)$, $\Delta x\to 0$就是$x\to x_0$,$\Delta y\to 0$就是$f(x)\to f(x_0)$.

定义2 设函数 $f(x)$在$U(x_0,\delta)$内有定义,若函数 $f(x)$当$x\to x_0$时的极限存在,且等于它在点x_0处的函数值$f(x_0)$,即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 那么就称函数$f(x)$在点$x_0$连续.

定义3:("$\varepsilon-\delta$"定义)$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使当$|x-x_0|<\delta$时,恒有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}|f(x_0+\Delta x)-f(x_0)|=0$$

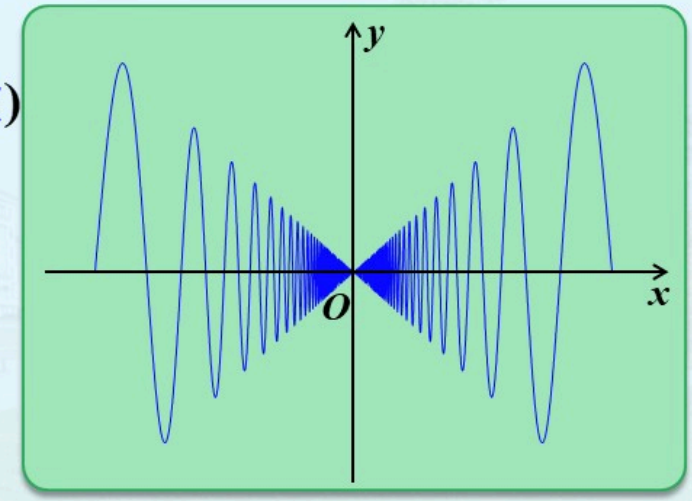
$$\Leftrightarrow\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|=0$$

例1 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

证 $\because \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$ (无穷小×有界函数)

又 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$,

由定义2知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.



3. 左、右连续

若函数$f(x)$在$(a,x_0]$内有定义,且$f(x_0-0)=f(x_0)$,

即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$, 则称$f(x)$在点$x_0$处左连续;

若函数$f(x)$在$[x_0,b)$内有定义,且$f(x_0+0)=f(x_0)$,

即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$, 则称$f(x)$在点$x_0$处右连续.

定理 函数$f(x)$在x_0处连续 $\Leftrightarrow$ 是函数$f(x)$在x_0处既左连续又右连续.

即函数$f(x)$在x_0处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0).$$

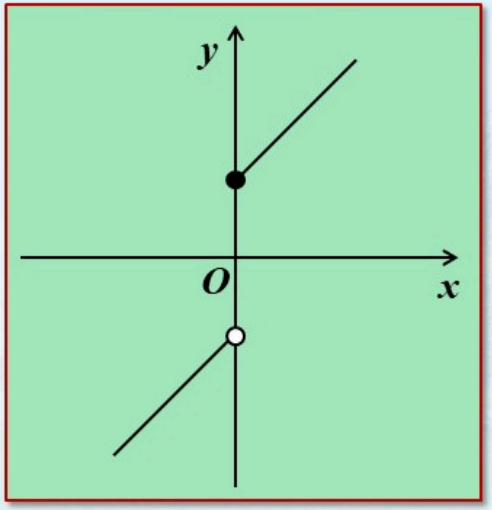
例2 讨论函数$f(x)=\begin{cases}x+2, & x\geq 0,\\ x-2, & x<0,\end{cases}$在$x=0$处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2=f(0),$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2\neq f(0),$

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

故函数$f(x)$在点$x=0$处不连续.



4. 连续函数与连续区间

- 在(a,b)上每一点都连续的函数，叫做(a,b)上的**连续函数**，或者说**函数在(a,b)上连续**.
- 如果函数在开区间(a,b)内连续，并且在左端点$x=a$处右连续，在右端点$x=b$处左连续，则称函数$f(x)$**在闭区间$[a,b]$上连续**.
- $C(a,b)$表示在开区间(a,b)内全体连续函数构成的集合；
  如果函数$f(x)$在开区间(a,b)内连续，记为$f(x)\in C(a,b)$.
- $C[a,b]$表示在闭区间$[a,b]$上全体连续函数构成的集合；
  如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，记为$f(x)\in C[a,b]$.
- **连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线。**

例3 证明函数$y=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内连续.

证 任取$x_0\in(-\infty,+\infty)$,

$$\Delta y=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\because\left|\cos(x_0+\frac{\Delta x}{2})\right|\le 1,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}=0,\quad \therefore\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

即函数$y=\sin x$对任意$x_0\in(-\infty,+\infty)$都是连续的.

故$y=\sin x\in C(-\infty,+\infty)$

类似可以证明: $y=\cos x\in C(-\infty,+\infty)$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

二、函数的间断点

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足的三个条件：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处有定义；　(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

如果上述三个条件中只要有一个不满足，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续(或间断)，并称点 x_0 为 $f(x)$ 的不连续点(或间断点).

凡不满足上述三个条件之一，$f(x)$ 在点 x_0 处必间断：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处无定义；　(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，且 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

间断点的分类：

定义：若点x_0为$f(x)$的间断点，但$f(x)$在点x_0的左右极限均存在

$\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\text{均存在}\right)$，则称点$x_0$为$f(x)$的第一类间断点.

凡不是第一类间断点的间断点称为第二类间断点.

第一类间断点$\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\text{均存在}\right)$又可分为：

1. 可去型间断点：如果$f(x)$在点x_0处的极限存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0)$，
   或$f(x)$在点x_0处无定义，则称点x_0为函数$f(x)$的可去间断点.

2. 跳跃型间断点：如果$f(x)$在点x_0处左，右极限都存在，但
   $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，则称点$x_0$为函数$f(x)$的跳跃型间断点.